



Homogénéisation en viscoélasticité linéaire non-vieillissante par la méthode de l'inclusion équivalente : application aux matériaux cimentaires

Yassine El Assami

► To cite this version:

Yassine El Assami. Homogénéisation en viscoélasticité linéaire non-vieillissante par la méthode de l'inclusion équivalente : application aux matériaux cimentaires. Génie civil. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1051 . tel-01235752

HAL Id: tel-01235752

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01235752>

Submitted on 30 Nov 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ — — PARIS-EST



Thèse présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Sciences des Matériaux

par

Yassine EL ASSAMI

École Doctorale : SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

***Homogénéisation en viscoélasticité linéaire
non-vieillissante par la méthode de l'inclusion
équivalente : application aux matériaux cimentaires***

Thèse soutenue le 26 mai 2015 devant le jury composé de :

Guy BONNET	<i>Président</i>
Jean-Baptiste COLLIAT	<i>Rapporteur</i>
Renald BRENNER	<i>Rapporteur</i>
Sébastien BRISARD	<i>Examineur</i>
Julien SANAHUJA	<i>Examineur</i>
Luc DORMIEUX	<i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

Le présent mémoire est le résultat d'un travail de recherche de près de trois ans, effectué dans le cadre d'une thèse CIFRE en partenariat avec EDF R&D, l'IFSTTAR et le laboratoire Navier. Se diriger vers le domaine de la recherche après avoir fini son diplôme d'ingénieur n'est pas un choix évident aux yeux de beaucoup, bien que j'aie toujours aperçu de la sorte mon parcours professionnel. Maintenant que je suis en train d'écrire ces lignes, je me rends compte de la chance que j'ai eu à franchir cette étape. Je tiens à l'occasion à remercier monsieur Karam Sab qui m'a mis au courant au sujet de la présente thèse et m'a mis en contact avec ses acteurs.

J'adresse ma plus grande gratitude à mon équipe d'encadrement qui m'a tendu les bras tout au long de ce parcours pentu et serpentant.

J'ai eu l'immense honneur d'être accompagné tout au long de ce travail par Messieurs Sébastien Brisard et Julien Sanahuja qui, dès nos premières entrevues, m'ont aidé à prendre en main les outils pratiques et théoriques permettant d'aborder mes travaux et m'ont guidé vers les bonnes références. Leur assiduité, professionnalisme et lucidité ne bénéficiaient pas uniquement au déroulement de ce projet scientifique, mais représentent un fil conducteur pour mener à bien tout projet d'une telle complexité. Je suis très reconnaissant envers eux pour leur soutien, aussi bien technique que moral, et pour leur confiance.

J'exprime mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Luc Dormieux, qui a toujours été présent pour tracer avec mes encadrants les lignes conductrices de mon travail. Son expérience et sa clairvoyance m'étaient un atout précieux. Faire partie de cette famille de chercheurs, dont mes encadrants, qui ont effectués leurs travaux de doctorat sous la supervision de monsieur Dormieux, est un grand honneur.

Je remercie vivement Monsieur Marc Bonnet qui a présidé le jury, et Messieurs Renald Brenner et Jean-Baptiste Colliat qui ont pris soin de rapporter ce manuscrit. Leurs corrections et conseils étaient d'une inestimable valeur et ont permis de me guider dans ma présentation et d'avoir un regard très constructif sur le manuscrit. La discussion effectuée à la suite de la soutenance était également très intéressante et a permis de dégager plusieurs idées pour mener plus loin certains points du présent sujet.

J'ai beaucoup apprécié ma présence au sein de l'équipe Génie-Civil du groupe MMC au site EDF R&D des Renardières. Je me rappelle de toutes les réunions conviviales d'équipe autour d'un café ; pour un doctorant, ces ouvertures transversales sont une bonne opportunité pour avoir une vue d'ensemble des activités et projets en cours. Je remercie tous les membres de ce groupe

pour leur accueil et leur soutien, et je remercie particulièrement Messieurs Nicolas Prompt et Hing-Ip Wong, chefs du groupe MMC, pour leur remarquable professionnalisme, leurs qualités humaines et leurs conseils pertinents lors des réunions d'avancement.

L'autre partie de mon travail était effectuée au laboratoire Navier. En plus du plaisir que j'ai eu à côtoyer mes anciens professeurs et collègues de classe, je ne me sentais pas dépaycé. Je remercie tous les chercheurs du laboratoire et le personnel administratif pour cette ambiance conviviale dont j'ai joui et pour tous les échanges qui m'ont bien aidé dans mon travail.

Je porte à cette occasion une sincère pensée à tous mes professeurs qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions. Chacun d'entre eux a une part dans le présent projet et tous mes projets futurs.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : mes parents, mon frère et tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de cette expérience.

Champs-sur-Marne, le 05/07/2015

Résumé

Homogénéisation en viscoélasticité linéaire non-vieillissante par la méthode de l'inclusion équivalente : application aux matériaux cimentaires

La prédiction du comportement à long terme des matériaux cimentaires est un enjeu majeur pour contribuer à l'étude de la durabilité des structures précontraintes. Le présent travail porte sur l'utilisation de la méthode de l'inclusion équivalente, approche d'homogénéisation multi-échelle simplifiée, pour la prédiction du fluage dans ces matériaux. Le fluage est modélisé par la viscoélasticité linéaire sans vieillissement.

La méthode de l'inclusion équivalente permet de contourner certaines difficultés et limitations que présentent les approches classiques. Pour les matériaux cimentaires, fortement hétérogènes, les approches multiéchelles classiques sont ou bien numériquement lourdes et très complexes à mettre en œuvre, ou bien pas suffisamment détaillées pour prendre en compte les spécificités d'une microstructure. La méthode de l'inclusion équivalente présente un juste-milieu et permet de calculer des microstructures simplifiées de type matrice-inclusions et de fournir des estimations ou des bornes sur le comportement homogénéisé.

Sous sa forme variationnelle, la méthode de l'inclusion équivalente n'a jusqu'alors été mise en œuvre que pour des inclusions de forme sphérique. Le présent travail propose d'étendre cette méthode à des inclusions de forme ellipsoïdale dont la variation de l'élancement permet de modéliser de nouveaux éléments asphériques tels que les fissures, les fibres et les cristaux de portlandite. Cette complexification de la géométrie a un impact sur le temps de calcul, qui est amplifié dans le cadre du fluage. Le second volet du travail porte alors sur l'extension de la méthode de l'inclusion équivalente à la viscoélasticité linéaire sans vieillissement par l'intermédiaire de la transformée de Laplace–Carson. Une méthodologie efficace (tant du point de vue de la précision que de celui du temps de calcul) est finalement proposée pour effectuer l'inversion numérique de cette transformée.

Mots clés : homogénéisation, inclusion équivalente, matrice-inclusions, viscoélasticité linéaire sans vieillissement, fluage, matériaux cimentaires.

Abstract

Homogenization of non-ageing, linear viscoelastic materials by the equivalent inclusion method : application to cementitious materials

The prediction of long-term behaviour of cementitious materials is a major concern which contributes to the study of the durability of prestressed structures. This work focuses on the use of the equivalent inclusion method, a simplified multi-scale homogenization approach, for the prediction of creep in these materials. Creep is modelled by a non-ageing linear viscoelastic behaviour.

The equivalent inclusion method overcomes certain difficulties and limitations inherent to conventional approaches. For cementitious materials, highly heterogeneous, conventional multi-scale approaches are, either computationally heavy and complex to implement, or not sufficiently detailed to take into account the specificities of a microstructure. The equivalent inclusion method presents a compromise and allows the calculation of simplified matrix-inclusion type microstructures and to provide estimates or bounds on the homogenized behaviour.

Under its variational form, the equivalent inclusion method has, up to now, been implemented only for spherical inclusions. This work proposes to extend this method to ellipsoidal inclusions whose variation of aspect-ratio allows modeling of new aspheric elements such as cracks, fibers and specific hydrates such as portlandite crystals. Such morphological enrichments have an impact on the computation time, that is amplified in the context of creep. The second aspect of the work then regards the extension of the equivalent inclusion method to the non-ageing linear viscoelasticity by means of the Laplace–Carson transform. A practical and efficient methodology (both from the viewpoint of precision and calculation time) is finally proposed to perform the numerical inversion of this transform.

Key words : homogenization, equivalent inclusion, matrix-inclusion, non-ageing linear viscoelasticity, creep, cementitious materials.

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	5
Abstract	7
Introduction	17
1 La méthode de l'inclusion équivalente	23
1.1 Équation de Lippmann–Schwinger	23
1.1.1 Équation de Lippmann–Schwinger en domaine borné	23
1.1.1.1 L'opérateur de Green d'ordre 4 en domaine borné	24
1.1.1.2 Équation de Lippmann–Schwinger	25
1.1.1.3 Principe de Hashin et Shtrikman	26
1.1.2 Équation de Lippmann–Schwinger modifiée	26
1.1.2.1 Opérateur de Green du milieu infini et l'approximation de Willis (1977)	26
1.1.2.2 Conditions aux limites mixtes	28
1.1.2.3 Principe de Hashin et Shtrikman associé à l'équation de Lippmann– Schwinger modifiée	29
1.2 Formulation variationnelle de la méthode de l'inclusion équivalente	30
1.2.1 Forme faible de l'équation de Lippmann–Schwinger	30
1.2.2 Discrétisation de type Galerkin	31
1.2.3 Estimation de la déformation et de la contrainte dans les inclusions	32

1.3	Forces et faiblesses de la méthode de l'inclusion équivalente	33
1.3.1	Calcul de propriétés apparentes	33
1.3.2	Calcul de champs locaux	34
1.3.2.1	Comparaison des champs de déformation	36
1.3.2.2	Portée des interactions élastiques	39
2	Extension aux inclusions ellipsoïdales	43
2.1	Tenseur d'influence de deux ellipsoïdes	43
2.2	Développement limité d'ordre 2 du tenseur d'influence	45
2.3	Intégration numérique du tenseur d'influence	47
2.3.1	Principe du calcul	47
2.3.2	Schéma d'intégration numérique	48
2.4	Validation des deux approches	49
2.4.1	À propos des deux approches	49
2.4.2	Analyse de la précision de l'intégration numérique	49
2.4.3	Analyse de la précision du développement multipolaire	52
2.4.4	Première détermination d'une <i>distance de transition</i>	56
2.5	Application : « portée » des interactions élastiques	57
2.5.1	Inclusions plongées dans un domaine infini	58
2.5.2	Microstructure à inclusions sphériques	58
2.5.3	Microstructure à inclusions ellipsoïdales	62
3	Application en viscoélasticité linéaire non-vieillissante	67
3.1	Homogénéisation en viscoélasticité linéaire	68
3.1.1	Problème d'homogénéisation en viscoélasticité linéaire sans vieillissement .	69
3.1.1.1	Comportement viscoélastique linéaire non vieillissant	69
3.1.1.2	Problème d'homogénéisation	70
3.1.2	Utilisation du principe de correspondance	71
3.1.3	Le modèle de Burgers pour la matrice cimentaire	72
3.2	Inversion de la transformée de Laplace–Carson - État de l'art	74

3.2.1	Méthode de Stehfest	75
3.2.2	Inversion par collocation	77
3.2.2.1	Méthode de Schapery	78
3.2.2.2	Méthode de Lévesque	78
3.2.2.3	Méthode de Rekik - Optimisation non linéaire des temps caractéristiques	79
3.2.3	Méthode directe	80
3.3	Optimisation de la méthode de Lévesque	82
3.3.1	Calculs de référence	83
3.3.1.1	Schéma de Mori-Tanaka avec un biphasé de Maxwell incompressible	84
3.3.1.2	Schéma de Mori-Tanaka avec matrice de Burgers et inclusions élastiques	85
3.3.1.3	Schéma auto-cohérent avec un biphasé de Maxwell incompressible	88
3.3.2	Choix des points de collocation p_s	89
3.3.3	Optimisation des temps caractéristiques	95
3.3.4	Évaluation de l'optimisation pour des cas de référence	96
3.3.5	Réalité physique des temps de collocation	104
3.3.6	Isolation de la composante transitoire d'une fonction viscoélastique	105
3.3.6.1	Calcul semi-analytique	105
3.3.6.2	Calcul par moindres-carrés généralisés	108
3.3.6.3	Calcul par théorème des valeurs aux limites	111
3.4	Homogénéisation numérique en viscoélasticité linéaire non-vieillissante par la méthode de l'inclusion équivalente	114
3.4.1	Principe du calcul	114
3.4.1.1	Calcul de base et confrontation aux éléments finis	114
3.4.1.2	Méthode de l'inclusion équivalente en viscoélasticité linéaire sans vieillissement	117
3.4.2	Implémentation	118
3.5	Application : relaxation macroscopique de microstructures constituées d'inclusions ellipsoïdales	119
3.5.1	Microstructures isotropes	120
3.5.2	Microstructure anisotrope	124

Conclusion et perspectives	129
Conclusion	129
Perspectives	131
Annexes	143
A Calcul numérique du tenseur d'influence	145
B Développement limité du tenseur d'influence	151
B.1 Développement limité d'ordre 0	151
B.2 Développement limité d'ordre 2	151
B.2.1 Calcul des termes élémentaires de ξ	152
B.2.2 Calcul des termes tensoriels	153

Notations

$\overline{\mathcal{B}}^D$	moyenne volumique de la grandeur \mathcal{B} sur le domaine D
$\overline{\mathcal{B}}$	moyenne volumique de la grandeur \mathcal{B} sur le VES ($\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}^\Omega$)
\underline{A}	tenseur d'ordre 1
\mathbf{A}	tenseur d'ordre 2
\mathbb{A}	tenseur d'ordre 4
$A \cdot B$	produit simplement contracté de deux tenseurs
$A : B$	produit doublement contracté de deux tenseurs
$A \otimes B$	produit tensoriel de deux tenseurs
$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$
$\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$
$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} + \mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})$
$A \bullet^s B$	produit tensoriel symétrisé : $A \bullet^s B = \frac{1}{2} (A \bullet B + B \bullet A)$ le \bullet désigne un symbole d'un produit tensoriel ($\otimes, \underline{\otimes}, \overline{\otimes}, \underline{\otimes}$)
$\text{tr } \mathbf{A}$	trace de \mathbf{A}
${}^t \mathbf{A}$	transposé du tenseur \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	inverse d'un tenseur d'ordre 2 ou 4
δ	tenseur unité d'ordre 2
\mathbb{I}	tenseur unité d'ordre 4 ($\mathbb{I} = \delta \underline{\otimes} \delta$)

\mathbb{J}	projecteur sphérique, extrayant la partie sphérique d'un tenseur isotrope d'ordre 2 $\mathbb{J} = \frac{1}{d}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}$ où d est la dimension de l'espace
\mathbb{K}	projecteur déviatorique, extrayant la partie déviatorique d'un tenseur isotrope d'ordre 2 $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ où d est la dimension de l'espace
$\underline{\text{grad}}_x(a)$	gradient d'une fonction scalaire par rapport à la coordonnée spatiale \underline{x} $\underline{\text{grad}}(a)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté
$\mathbf{grad}_x(\underline{A})$	gradient d'un tenseur d'ordre 1 par rapport à la coordonnée spatiale \underline{x} $\mathbf{grad}(\underline{A})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté
$\mathbf{grad}_x^s(\underline{A})$	gradient symétrisé d'un tenseur d'ordre 1 par rapport à \underline{x} $\mathbf{grad}_x^s(\underline{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}(\underline{A}) + {}^t\mathbf{grad}(\underline{A}))$
$\text{div}_x(\underline{A})$	divergence d'un tenseur d'ordre 1 par rapport à la variable \underline{x} $\text{div}(\underline{A})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté
$\underline{\text{div}}_x(\mathbf{A})$	divergence d'un tenseur d'ordre 2 par rapport à la variable \underline{x} $\underline{\text{div}}(\mathbf{A})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté
VER	volume élémentaire représentatif
VES	volume élémentaire statistique (correspondant à une configuration géométrique donnée)
Ω	domaine occupé par le VES
Ω_α	domaine occupé par la phase ou l'inclusion α
∂D	contour du domaine D
$ \Omega_\alpha $ ou v_α	volume (ou air) du domaine de l'inclusion α
$ \Omega $ ou V	volume (ou air) du domaine Ω
k_α	module de compression de la phase α
μ_α	module de cisaillement de la phase α
E_α	module d'Young de la phase α
ν_α	coefficient de Poisson de la phase α
\mathbb{C}_α	tenseur de rigidité de la phase α quand le matériau est isotrope : $\mathbb{C}_\alpha = dk_\alpha\mathbb{J} + 2\mu_\alpha\mathbb{K}$ où d est la dimension de l'espace
\mathbb{S}_α	tenseur de souplesse de la phase α ($\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$)
\mathbb{C}_0	tenseur de rigidité du milieu de référence

$\underline{x}, \underline{y}$	coordonnées spatiales
$\underline{\xi}$	vecteur déplacement
$\underline{\varepsilon}$	tenseur de déformation
$\underline{\sigma}$	tenseur contraintes
$\underline{\omega}$	tenseur de précontrainte
$\underline{\tau}$	tenseur de polarisation
$\chi_D(\underline{x})$	fonction caractéristique du domaine D (On note $\chi = \chi_\Omega$)
\mathbb{P}_α	tenseur de Hill de l'inclusion α (\mathbb{P}_Ω est le tenseur de Hill du domaine Ω)
$\mathbb{T}_0(\underline{x}, \underline{y})$	opérateur de Green du milieu de référence
$\mathbb{T}_0^\infty(\underline{r})$	opérateur de Green du domaine infini
$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{r})$	tenseur d'influence des inclusions α et β $\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{r}) = \int_{\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \mathbb{T}_0(\underline{x}, \underline{y}) dV_{\underline{y}} dV_{\underline{x}} = \Omega \overline{\chi_\alpha \mathbb{T}_0 * \chi_\beta}$
\mathbb{S}_α	tenseur d'auto-influence de l'inclusion α $\mathbb{S}_\alpha = \mathbb{T}_{\alpha\alpha} = v_\alpha \mathbb{P}_\alpha$
$\mathcal{H}(\underline{\tau})$	fonctionnelle de Hashin et Shtrikman
t, τ	variables temporelles
p	variable de Laplace
$\mathcal{L}_f(p)$	transformée de Laplace de la fonction $f(t)$
$f^*(p)$	transformée de Laplace–Carson de la fonction $f(t)$

Introduction

La demande d'électricité, en croissance, amène EDF à augmenter ses capacités de production. Pour les centrales nucléaires existantes, l'objectif est d'allonger leur durée de fonctionnement tout en améliorant leur niveau de sûreté. Un vaste plan d'investissement a donc été lancé sur l'ensemble du parc de production.

Les infrastructures en béton constituent des ouvrages importants pour les centrales nucléaires (enceinte, bâtiment combustible, tours aéroréfrigérantes ...). L'enceinte de confinement en particulier n'est pas remplaçable, et constitue donc un élément crucial dans l'évaluation de la durée de vie de la centrale. Le comportement à long terme du béton est ainsi un grand enjeu.

Afin d'optimiser le confinement, les enceintes internes sont précontraintes. Les câbles dans les gaines sont injectés d'un coulis qui les protège de la corrosion mais qui empêche de les retendre ensuite, ce pourquoi il est important de suivre et d'anticiper le fluage du béton.

La microstructure du béton a une grande influence sur son comportement différé. Sa prise en compte par des méthodes en champs moyens (tels que celles basées sur la solution du problème d'Eshelby) omet beaucoup de détails micro-structuraux. Les méthodes en champs complets permettent de contourner certaines limitations des méthodes précédentes, au prix d'un temps de calcul élevé et d'une préparation parfois complexe (maillage, par exemple). Ce travail propose d'utiliser une forme variationnelle de la méthode de l'inclusion équivalente. Il s'agit d'une méthode hybride¹ permettant de prendre en compte plus de détails de microstructure que les méthodes en champs moyens (tailles, positions et orientations relatives des inclusions) sans avoir à discrétiser des microstructures virtuelles compliquées ni exécuter de lourds calculs.

La méthode de l'inclusion équivalente est établie dans le cadre de l'élasticité linéaire et utilisée en pratique pour des microstructures simplifiées (inclusions sphériques). Dans le présent travail, on s'intéresse à l'extension de cette méthode pour prendre en compte le fluage (modélisé ici par une loi de comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement). On s'intéresse également à la prise en compte de géométries plus complexes (inclusions de forme ellipsoïdale). [Cette géométrie permet de mettre en évidence l'effet de l'orientation des inclusions et de modéliser des éléments

1. Dans ce travail, on propose d'utiliser une forme variationnelle de la méthode de l'inclusion équivalente pour effectuer les calculs d'homogénéisation. Il s'agit d'une méthode hybride, à mi-chemin entre une approche en champ moyen et un calcul en champ complet. Une telle approche permet de prendre en compte plus de détails de la microstructure que les méthodes en champ moyen (tailles, positions et orientations relatives des inclusions) sans nécessiter de discrétisation complexe de la géométrie comme dans une approche en champ complet.

comme les fissures (ellipsoïdes aplatis) et les fibres (ellipsoïdes allongés) dans le béton.] Cette géométrie permet de mettre en évidence l'effet de l'orientation des inclusions et de modéliser des éléments asphériques de différents rapports d'aspects.

Modélisation des matériaux cimentaires

Les matériaux cimentaires sont fortement multiéchelles et caractérisés par une forte hétérogénéité. Plusieurs études se sont intéressées aux différents aspects morphologiques de ces matériaux². De l'échelle de la pâte du ciment à celle du béton, on note une grande variabilité des formes géométriques des éléments, de leurs distributions et matériaux constitutifs. Les modèles morphologiques doivent alors être adéquats avec la méthode de calcul utilisée et avec l'échelle considérée.

Plusieurs méthodes sont exploitées pour le calcul³ des matériaux cimentaires. Mais on peut les regrouper selon deux ensembles :

- méthodes analytiques, dites 0D,
- méthodes numériques, dites 3D.

La stratégie d'*EDF* vise à développer ces deux volets et à produire des méthodes intermédiaires (dites hybrides) qui bénéficient des avantages de l'un et de l'autre (fig. 1). Ces dernières sont précisément l'objet du présent travail.

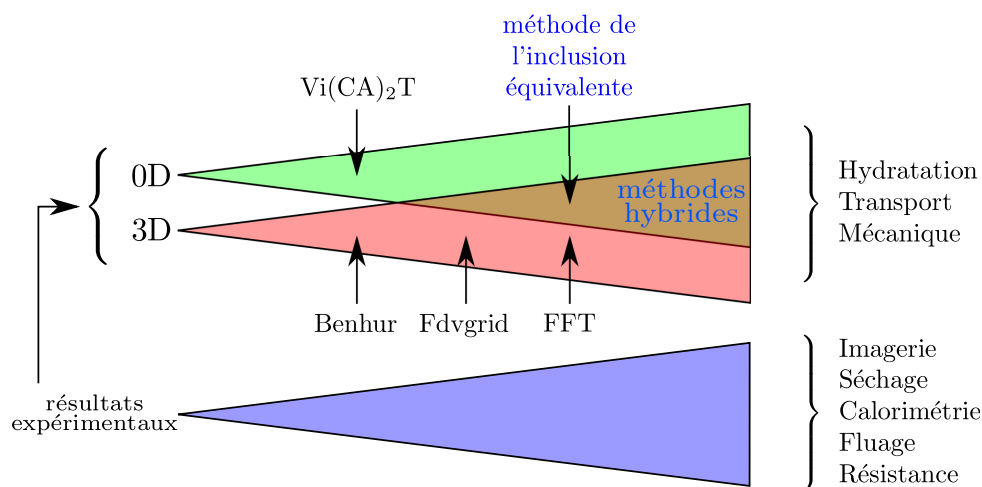


FIGURE 1 – La stratégie de modélisation des matériaux cimentaires adoptée à EDF R&D

La microstructure du béton, multiéchelle, est extrêmement complexe. La modélisation micro-mécanique passe nécessairement par une étape de simplification de la microstructure. On propose le modèle morphologique suivant :

2. En particulier, les travaux de Escoda (2012), réalisés à EDF R&D dans la même lignée de projets que le présent travail.

3. Le benchmark (Dunant *et al.*, 2013) organisé par EDF R&D représente une confrontation d'une multitude de méthodes opérant sur différents types de morphologies pour le calcul des propriétés macroscopiques de matériaux cimentaires.

- à l’échelle du béton, le matériau peut être vu comme un ensemble de grains (inclusions) plongés dans le mortier (matrice) considéré dans ce cas homogène. Les grains peuvent être idéalisés par une forme sphérique (ou des disques en 2D). Des formes ellipsoïdales peu élancées peuvent également être considérées pour mettre en évidence l’effet de l’orientation des grains. [Les formes ellipsoïdales très aplaties pourront à terme être utilisées pour prendre en compte la présence de fissures. Les ellipsoïdes très allongés peuvent servir à la modélisation des fibres.] Les formes ellipsoïdales très aplaties peuvent être utilisées pour prendre en compte la présence de fissures et les ellipsoïdes très allongés peuvent servir à la modélisation de certains renforts tels que les fibres. On se limitera néanmoins dans le présent travail à des rapports d’aspect finis.
- à l’échelle du mortier, les formes des grains de sable et les pores sont idéalisées par des sphères ou des ellipsoïdes peu élancés,
- à l’échelle de la pâte du ciment, les ellipsoïdes asphériques permettent de prendre en compte les effets des cristaux de portlandite qui sont souvent aplatés.

Méthodes d’homogénéisation analytiques, numériques et hybrides

Les approches en champs moyens ou effectifs basées sur le formalisme du problème d’Eshelby permettent de donner des estimations ou d’encadrer le comportement homogénéisé d’une microstructure. Le choix d’un schéma, à partir des connaissances disponibles sur la morphologie, reste tout de même une démarche qualitative. Si par exemple nous sommes face à une microstructure à faible fraction volumique d’inclusions, nous pourrions envisager le schéma de Mori et Tanaka (1973). Lorsque la fraction volumique d’inclusions est élevée, comme sur un béton, il est possible d’envisager le schéma de Le Roy (1995) pour permettre de le caler à des données expérimentales en faisant varier la proportion de la matrice dite *passive*. Quand le composite est constitué principalement d’un assemblage de grains sans matrice identifiable (poly-cristal) on pense au schéma auto-cohérent (Hill, 1965; Sanahuja et Dormieux, 2005). La prise en compte d’une orientation privilégiée est possible par la considération des inclusions ellipsoïdales avec certaines distributions des orientations (Ponte Castañeda, 1991; Sanahuja *et al.*, 2007). Les schémas classiques ont certes beaucoup d’applications et peuvent être utilisés au moins pour justifier des ordres de grandeur. Ils sont particulièrement efficaces du point de vue du temps de calcul. Ce qui leur est reproché, c’est leur démarche peu quantitative de prise en compte des spécificités d’une microstructure.

La précision, qui est une faiblesse pour les méthodes en champs moyens, est une force pour les approches en champs complets. Il est bien connu que la précision des résultats a pour coût le niveau de détail qu’on fournit. Les méthodes en champs complets nécessitent une connaissance très détaillée de la microstructure. La réalisation d’un calcul par l’une de ces méthodes passe par les étapes suivantes :

- création de la microstructure au sens géométrique du terme (par exemple, segmentation d’images expérimentales, ou génération d’une microstructure virtuelle),
- maillage ou discrétisation,
- calcul,
- post-traitement des résultats.

Quand il s'agit de faire des calculs à l'échelle d'une microstructure caractérisée par une certaine régularité, l'utilisation de ces méthodes reste envisageable. Mais pour des microstructures fortement irrégulières comme celle du béton, la production, discrétisation et calcul d'une microstructure deviennent très lourdes. De plus, en toute rigueur, l'estimation des propriétés macroscopiques de milieux hétérogènes est effectuée sur un grand nombre de volumes élémentaires statistiques⁴ (VES) ou sur des volumes élémentaires représentatifs (VER) de très grande taille. Cela présente plusieurs problèmes à résoudre d'un grand nombre de degrés de liberté dont le traitement met en jeu la capacité des calculateurs numériques et le temps utilisateur.

Pour donner une idée, la figure 2 représente la microstructure B11 (Dunant *et al.*, 2013) qui est une représentation virtuelle d'un béton d'enceinte de centrale nucléaire⁵. Le maillage généré dans l'étude proposée à (Dunant *et al.*, 2013) en vue des calculs aux éléments finis comporte 16.1 millions d'éléments. On constate bien le nombre élevé de degrés de liberté et la complexité de la réalisation de cette microstructure. Pour des microstructures aussi complexes, il est également très fréquent de devoir procéder à des ajustements manuels du maillage.

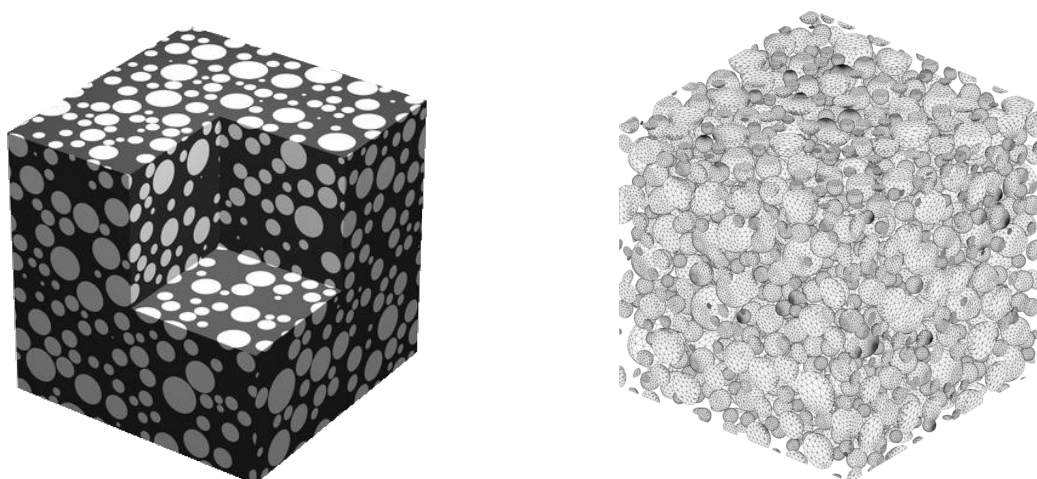


FIGURE 2 – Microstructure du béton B11 (idéalisant le béton d'une enceinte d'une centrale nucléaire) (Dunant *et al.*, 2013) et son maillage (fourni par Benoît Bary)

La méthode de l'inclusion équivalente est à mi-chemin entre les méthodes en champs complets et les schémas analytiques. Elle peut ainsi être vue comme une méthode hybride (au sens de la figure 1). Elle est destinée à des microstructures simplifiées de type matrice-inclusions. Il est possible, par son biais, de simuler des microstructures réalistes, dans lesquelles certains paramètres morphologiques (tels que la distribution d'orientations, la distribution de tailles des inclusions,

4. Comme les matériaux cimentaires sont très hétérogènes, le matériau ne peut pas être représenté par une seule microstructure explicite. Les propriétés macroscopiques sont calculées en général statistiquement sur un ensemble de réalisations. La notion de *volume élémentaire représentatif (VER)* sera remplacée dans ce qui suit par *volume élémentaire statistique (VES)*.

5. La microstructure B11 est de type matrice-inclusions, utilisée pour des simulations considérant des conditions aux limites périodiques. Elle contient 2024 inclusions de diamètres \varnothing/L compris entre 0.043 et 0.167, L étant le côté de la boîte cubique contenant la microstructure. La fraction volumique des inclusions est $f = 0.402$.

pratiquement de forme ellipsoïdale, etc ...) peuvent être pris en compte de façon plus fine que par des schémas d'homogénéisation classiques. Cette méthode ne nécessite pas de discrétisation de la microstructure et ne nécessite qu'un faible nombre de degrés de liberté, ce qui permet de réduire le temps de calcul et de pré-traitement.

Applications de la méthode de l'inclusion équivalente

La méthode de l'inclusion équivalente opère sur des microstructures de géométries explicites définies par un ensemble d'inclusions. Chaque inclusion est définie individuellement par sa géométrie de forme ellipsoïdale (ou elliptique en 2D), son orientation et son matériau. Les inclusions sont plongées dans une matrice de matériau homogène dont le bord est à distance finie ou infinie. Quand le bord est à distance finie, la méthode impose qu'il soit de forme ellipsoïdale. Ainsi, les microstructures générées en vue de ce calcul doivent prendre en compte cette spécificité.

Le post-traitement des résultats de cette méthode permet de :

- déterminer des estimations, qui peuvent avoir un statut de borne, des propriétés macroscopiques d'une réalisation,
- déterminer des estimations locales des champs au niveau des inclusions.

Cette méthode peut éventuellement être adaptée pour étudier les interactions entre les inclusions et prendre en compte la présence d'auréoles de transition autour des gains.

En dehors des matériaux cimentaires, cette méthode peut être utilisée pour le calcul de toute microstructure de type matrice-inclusion à des échelles où les effets d'interface sont négligeables.

Prise en compte du fluage

Les matériaux cimentaires ont un comportement très complexe dans le temps, influencé par un nombre important de paramètres internes et externes. Le comportement est caractérisé différemment selon l'âge du béton :

- comportement au jeune âge : les réactions d'hydratation ne sont pas encore terminées et le béton n'a pas atteint son module d'Young nominal. Les aspects chimique et thermique sont prédominants dans cette phase,
- comportement à long terme : quand les réactions chimiques sont pratiquement finies, le matériau cimentaire devient plus influençable par l'environnement (température, humidité relative), l'aspect mécanique (macroscopique et microscopique) et microstructural (réseau des pores et fissures).

Dans le présent travail, ces matériaux sont traités d'un point de vue mécanique. On vise à établir les relations entre le comportement à long terme au niveau de la microstructure et le comportement à long terme macroscopique (fluage).

Le comportement à long terme est influencé par la charge appliquée, l'humidité interne et son gradient, le séchage et la température. Chacun de ces éléments a une contribution sur le fluage, ce qui rend cette notion très complexe. On s'intéresse dans ce qui suit uniquement à l'effet du fluage *propre*, c'est-à-dire provoqué par l'application et le maintien d'un effort mécanique.

Après la prise, on distingue deux phases où le béton se comporte d'une manière sensiblement différente :

- à moyen terme, le module d'Young varie dans le temps. L'effet du vieillissement ne peut être négligé dans ce cas.
- à long terme, l'effet de l'âge est moins important. Le vieillissement, bien que toujours présent, peut être négligé.

Dans ce qui suit, le fluage est modélisé par un comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement. Cette hypothèse a l'avantage de permettre l'extension de la méthode de l'inclusion équivalente à ce genre de comportement sans devoir recourir à des calculs non linéaires.

Contenu du manuscrit

La présente thèse a pour objectif de réaliser les extensions de la méthode de l'inclusion équivalente afin de l'appliquer au fluage des matériaux cimentaires. Ces extensions sont de deux natures :

- **géométrie** une méthodologie est proposée pour étendre cette méthode à des inclusions de forme ellipsoïdale,
- **comportement** initialement introduite dans le cadre de l'élasticité linéaire, elle sera étendue à des comportements viscoélastiques linéaires non vieillissants.

Après avoir formulé la méthode de l'inclusion équivalente au chapitre 1, une première application en est proposée pour calculer les propriétés macroscopiques d'une microstructure. Une seconde application illustre la capacité de la méthode de l'inclusion équivalente à rendre compte des interactions locales entre les inclusions.

Le chapitre 2 présente une méthodologie pour prendre en compte des inclusions de forme ellipsoïdale. Les tenseurs d'influence, permettant de quantifier les interactions mécaniques entre les inclusions, n'ont pas d'expression analytique simple dans ce cas (contrairement au cas des sphères). Ils sont calculés de deux manières différentes et complémentaires :

- par intégration numérique sur une surface sphérique quand, pour une paire d'inclusions, la forme de l'une a une grande influence sur les champs dans l'autre,
- par approximation de ces tenseurs par leur développement limité lorsque les inclusions sont assez éloignées pour que l'effet de la forme soit négligeable.

Une application est présentée par la suite pour étudier la portée des interactions élastiques dans une microstructure à inclusions ellipsoïdales.

Finalement, le chapitre 3 propose une méthodologie d'extension de la méthode de l'inclusion équivalente aux comportements viscoélastiques linéaires non vieillissants. La technique utilisée, basée sur la transformée de Laplace–Carson, peut être employée pour toutes les méthodes d'homogénéisation formulées en élasticité linéaire. Nous présentons en particulier dans ce chapitre un certain nombre d'optimisations permettant de réduire au mieux les calculs nécessaires à l'estimation du fluage des matériaux cimentaires.

Chapitre 1

La méthode de l'inclusion équivalente

1.1 Équation de Lippmann–Schwinger

L'homogénéisation d'un milieu hétérogène consiste à établir, pour un problème de micromécanique donné, la relation entre les moyennes volumiques des contraintes et des déformations. La détermination classique de cette relation est compliquée dans le cas d'un milieu à forte hétérogénéité (rigidité $\mathbb{C}(\underline{x})$). L'équation de Lippmann–Schwinger permet de remplacer le problème auxiliaire de micromécanique du milieu hétérogène par un problème équivalent formulé sur un milieu homogène précontraint. Cela donne l'accès à des outils mathématiques, basés sur le formalisme de l'opérateur de Green, facilitant le calcul de certains types de microstructures hétérogènes (Eshelby, 1957; Zeller et Dederichs, 1973).

1.1.1 Équation de Lippmann–Schwinger en domaine borné

Considérons un milieu élastique linéaire hétérogène Ω de raideur $\mathbb{C}(\underline{x})$. La détermination de son comportement élastique apparent passe par la résolution du problème suivant :

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.1b)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (1.1c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.1d)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})$ est le champ de déformation dérivé du champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{x})$. $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ est le champ de contrainte. \mathbf{E} désigne la déformation du milieu homogénéisé, imposée. Les conditions aux limites cinématiques (1.1c) sont souvent appelées *Kinematic Uniform Boundary Conditions* (KUBC) (Kanit *et al.*, 2003).

La solution du problème (1.1) dépend linéairement du paramètre de chargement \mathbf{E} . En particulier :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}} : \mathbf{E} \quad (1.2)$$

où $\mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}}$ désigne la raideur apparente du volume élémentaire statistique (VES) Ω .

1.1.1.1 L'opérateur de Green d'ordre 4 en domaine borné

Soit Ω un milieu homogène de rigidité uniforme \mathbb{C}_0 . Si on applique un déplacement $\mathbf{E} \cdot \underline{x}$ au bord de Ω et un champ de précontrainte $\varpi(\underline{x})$, les équations à satisfaire sont les suivantes :

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) = \mathbf{0} \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.3a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\varpi}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.3b)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (1.3c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.3d)$$

Dans le cas particulier où seul le déplacement au bord est le paramètre de chargement ($\boldsymbol{\varpi}(\underline{x}) = \mathbf{0}$), la solution de ce problème est évidente :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbf{E} \quad (1.4)$$

Si le champ de précontrainte $\boldsymbol{\varpi}(\underline{x})$ n'est pas nul et le bord du domaine est encastré, la solution de ce problème s'écrit formellement sous la forme (compte-tenu de la linéarité par rapport au seul paramètre de chargement $\boldsymbol{\varpi}$) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = -(\mathbb{F}_0 \circledast \boldsymbol{\varpi})(\underline{x}) \quad (1.5)$$

On appelle \mathbb{F}_0 opérateur de Green (c'est un opérateur tensoriel d'ordre 4 pour les problèmes de la mécanique et d'ordre 2 pour les problèmes analogues à celui du transport). Le symbole \circledast désigne le produit suivant :

$$(\mathbb{F}_0 \circledast \boldsymbol{\varpi})(\underline{x}) = \int_{\underline{x}' \in \Omega} \mathbb{F}_0(\underline{x}, \underline{x}') : \boldsymbol{\varpi}(\underline{x}') dV_{x'} \quad (1.6)$$

Ce produit s'apparente à un produit de convolution.

L'opérateur de Green $\mathbb{F}_0(\underline{x}, \underline{x}')$ quantifie l'effet d'une précontrainte appliquée au point \underline{x}' sur la déformation locale observée au point \underline{x} . Ainsi, l'opérateur de Green, convolué avec un champ de précontrainte quelconque $\boldsymbol{\varpi}$, correspond, à un signe près, à la déformation locale du milieu soumis à cette précontrainte.

Remarque. Il y a une relation entre l'opérateur de Green d'ordre 4 (\mathbb{F}_0) et la fonction de Green d'ordre 2 (\mathbf{G}_0) qui est la suivante :

$$\Gamma_{0,ijkl} = -\frac{1}{4} (\partial_{jl}^2 G_{0,ik} + \partial_{il}^2 G_{0,jk} + \partial_{jk}^2 G_{0,il} + \partial_{ik}^2 G_{0,jl}) \quad (1.7)$$

La solution du problème (1.3) est déduite des solutions (1.4) et (1.5) par superposition. Ainsi, le champ de déformation d'un milieu homogène de rigidité \mathbb{C}_0 soumis à un déplacement $\mathbf{E} \cdot \underline{x}$ imposé au bord et à un champ de précontrainte $\boldsymbol{\varpi}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbf{E} - (\mathbb{F}_0 \circledast \boldsymbol{\varpi})(\underline{x}) \quad (1.8)$$

1.1.1.2 Équation de Lippmann–Schwinger

Comme le milieu dans le problème auxiliaire de micromécanique (1.1) n'est pas homogène, il n'est pas possible d'utiliser directement l'opérateur de Green \mathbb{F}_0 pour sa résolution. Cependant, on remarque que par une simple manipulation algébrique de l'équation de comportement (1.1b), on peut remplacer le milieu hétérogène de départ par un milieu de référence homogène de rigidité \mathbb{C}_0 , précontraint par un champ dit de polarisation, $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$, hétérogène. Cela revient à introduire un nouveau système, équivalent au problème (1.1) de départ, avec une nouvelle inconnue $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$:

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.9a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.9b)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \boldsymbol{E} \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (1.9c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.9d)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\underline{x}) = (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.9e)$$

La polarisation a la même dimension et joue formellement le même rôle qu'une précontrainte. Nous préférons tout de même utiliser le terme de polarisation pour $\boldsymbol{\tau}(\underline{x})$, qui est en relation linéaire avec la déformation, afin de la distinguer de la précontrainte $\boldsymbol{\varpi}(\underline{x})$, qui est un paramètre de chargement (libre).

La rigidité \mathbb{C}_0 du milieu de référence choisi n'a théoriquement pas d'influence sur le comportement apparent (équivalence des systèmes (1.1) et (1.9)). Mais, lorsqu'on utilise des méthodes de résolution approchées, le choix du milieu de référence peut avoir une influence sur les résultats (§ 1.2).

Les équations de (1.9a) à (1.9d) sont équivalentes au problème (1.3) dont la solution est (1.8) (où la précontrainte $\boldsymbol{\varpi}$ est remplacée par la polarisation $\boldsymbol{\tau}$). Ainsi, le problème (1.9) est équivalent à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{E} - (\mathbb{F}_0 \otimes \boldsymbol{\tau})(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.10a)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\underline{x}) = (\mathbb{C}(\underline{x}) - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (1.10b)$$

L'élimination de la déformation dans le système (1.10) permet d'obtenir l'équation de Lippmann–Schwinger (Zeller et Dederichs, 1973) définie de la manière suivante¹ :

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \mathbb{F}_0 \otimes \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{E} \quad (1.11)$$

Cette équation est équivalente au problème de micromécanique initial (1.1).

1. L'équation de Lippmann–Schwinger est plutôt définie par élimination de la polarisation. Nous l'avons présentée sous cette forme en vue de pouvoir utiliser la polarisation par la suite.

1.1.1.3 Principe de Hashin et Shtrikman

La dualisation de l'équation de Lippmann–Schwinger permet de définir le principe variationnel de Hashin et Shtrikman (Hashin et Shtrikman, 1962; Willis, 1977). Ce principe va nous permettre dans certains cas, en plus de l'estimation du comportement apparent \mathbb{C}^{app} qui peut être obtenu par l'équation de Lippmann–Schwinger, de situer cette estimation par rapport à sa valeur réelle.

Nous noterons \mathcal{H} la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman. Elle est définie pour un champ de polarisation quelconque $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ comme suit :

$$\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \hat{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \hat{\boldsymbol{\tau}}} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : (\mathbb{F}_0 \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}})} \quad (1.12)$$

où $\overline{\mathcal{B}}$ est la moyenne volumique de la grandeur \mathcal{B} sur le domaine Ω .

Cette fonctionnelle est stationnaire pour le champ de polarisation solution de l'équation de Lippmann–Schwinger² (1.11), soit pour $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} = (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}$. Sa valeur en ce point est :

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : (\mathbb{C}^{\text{app}} - \mathbb{C}_0) : \mathbf{E} \quad (1.13)$$

On peut montrer (Hashin et Shtrikman, 1962; Willis, 1977) que le signe de $\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) - \mathcal{H}(\boldsymbol{\tau})$ est l'opposé de celui de $\mathbb{C} - \mathbb{C}_0$ au sens des formes quadratiques. Ainsi, en utilisant le principe de Hashin–Shtrikman et le résultat (1.13), on trouve :

$$\mathbb{C} \leq \mathbb{C}_0 \implies \forall \hat{\boldsymbol{\tau}}, \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{app}} : \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.14a)$$

$$\mathbb{C} \geq \mathbb{C}_0 \implies \forall \hat{\boldsymbol{\tau}}, \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{app}} : \mathbf{E} \geq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.14b)$$

En d'autres termes, si le milieu de référence est plus rigide (resp. plus souple) que toutes les phases en présence, le principe de Hashin et Shtrikman permet d'obtenir une borne supérieure (resp. inférieure) sur la raideur apparente.

1.1.2 Équation de Lippmann–Schwinger modifiée

1.1.2.1 Opérateur de Green du milieu infini et l'approximation de Willis (1977)

L'opérateur de Green \mathbb{F}_0 défini ci-dessus tient compte de la géométrie du domaine Ω . Son expression analytique n'est généralement pas connue pour des milieux bornés. Lorsque le domaine Ω est *grand*³, Willis propose d'approcher \mathbb{F}_0 par \mathbb{F}_0^∞ , opérateur de Green du milieu infini $\Omega = \mathbb{R}^d$,

2. Le point critique de \mathcal{H} correspond à la solution de l'équation de Lippmann–Schwinger.

3. Il faudrait préciser cette notion. On peut par exemple comparer la taille du domaine Ω à la longueur caractéristique des fluctuations spatiales du champ de précontrainte $\boldsymbol{\varpi}$.

défini par l'intermédiaire du problème élastique d'un milieu infini de raideur \mathbb{C}_0 , auquel est appliqué un champ de précontrainte ϖ et un déplacement affine à l'infini $\mathbf{E}^\infty \cdot \underline{x}$.

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{0} \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \quad (1.15a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \varpi \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \quad (1.15b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi}) \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \quad (1.15c)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}) \sim \mathbf{E}^\infty \cdot \underline{x} \quad \|\underline{x}\| \rightarrow \infty \quad (1.15d)$$

Par un raisonnement identique à celui du paragraphe 1.1.1.1, on peut écrire que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^\infty - \mathbb{F}_0^\infty * \varpi \quad (1.16)$$

où l'opérateur \mathbb{F}_0^∞ ainsi défini est invariant par translation, de sorte que le produit $\mathbb{F}_0^\infty \otimes \varpi$ se réduit à un produit de convolution standard $\mathbb{F}_0^\infty * \varpi$.

L'opérateur de Green du milieu infini est composé d'une partie régulière et une partie singulière. Il est singulier quand les points \underline{x} et \underline{y} sont confondus. Il est défini au sens des distributions pour une précontrainte ϖ comme suit :

$$(\mathbb{F}_0^\infty * \varpi)(\underline{x}) = \mathbb{P}_0 : \varpi(\underline{x}) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\substack{\underline{y} \in \mathbb{R}^d \\ \|\underline{y} - \underline{x}\| \geq \delta}} \mathbb{Q}_0(\underline{x} - \underline{y}) : \varpi(\underline{y}) dV_{\underline{y}} \quad (1.17)$$

Les expressions de \mathbb{P}_0 et \mathbb{Q}_0 peuvent être trouvées dans la littérature (Torquato, 1997) [pour les problèmes de l'élasticité plane ($d = 2$) et l'élasticité tridimensionnelle ($d = 3$).] pour les problèmes de l'élasticité bidimensionnelle (déformations planes, $d = 2$) et tridimensionnelle ($d = 3$). \mathbb{P}_0 est tout simplement le tenseur de Hill de l'inclusion sphérique (ou circulaire en 2D). La partie régulière $\mathbb{Q}_0(\underline{r})$ est proportionnelle à $\|\underline{r}\|^{-d}$.

La partie régulière $\mathbb{Q}_0(r\underline{n})$ peut être mise sous la forme intrinsèque suivante, qui s'avérera commode au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_0(r\underline{n}) = \frac{1}{16\pi\mu_0(1-\nu_0)r^3} [& -\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2(1-2\nu_0)\boldsymbol{\delta} \underline{\otimes} \boldsymbol{\delta} + 6\boldsymbol{\delta} \otimes^s (\underline{n} \otimes \underline{n}) \\ & + 12\nu_0 6\boldsymbol{\delta} \underline{\otimes}^s (\underline{n} \otimes \underline{n}) - 15\underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n}] \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\underline{r} = \underline{y} - \underline{x}$, $r = \|\underline{r}\|$, $\underline{n} = \underline{r}/r$ et μ_0 et ν_0 sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu de référence.

Muni de l'opérateur \mathbb{F}_0^∞ , il est maintenant possible de préciser l'approximation introduite par Willis (1977). Pour un domaine Ω borné, très *grand*, on conçoit que les conditions aux limites n'affecteront la solution du problème d'équilibre élastique qu'au voisinage du bord $\partial\Omega$. Il est donc naturel d'introduire l'approximation :

$$\mathbb{F}_0 \otimes \varpi \simeq \mathbb{F}_0^\infty * \varpi \quad (1.19)$$

On se convainc toutefois aisément que cette approximation est fausse. En effet, si ϖ est uniforme sur le domaine Ω , on a $\mathbb{F}_0 \circledast \varpi = \mathbf{0}$, tandis que $\mathbb{F}_0^\infty * \varpi$ n'est pas nécessairement nul⁴. Plus généralement, on a $\overline{\mathbb{F}_0 \circledast \varpi} = \mathbf{0}$ pour ϖ quelconque. Si Ω est ellipsoïdal, le théorème d'Eshelby généralisé (Brisard *et al.*, 2014, Th. 2) permet d'affirmer que :

$$\overline{\mathbb{F}_0^\infty * \varpi} = \mathbb{F}_0^\infty * (\chi \overline{\varpi}) = \mathbb{P}_\Omega : \overline{\varpi} \neq \mathbf{0} \quad (1.20)$$

où χ est la fonction indicatrice du domaine Ω .

Willis (1977) introduit donc l'approximation suivante :

$$\mathbb{F}_0 \circledast \varpi \simeq \mathbb{F}_0^\infty * (\varpi - \chi \overline{\varpi}) \quad (1.21)$$

qui garantit l'égalité des moyennes volumiques des deux membres. L'approximation précédente conduit alors Willis (1977) à introduire l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée :

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \mathbb{F}_0^\infty * (\boldsymbol{\tau} - \chi \overline{\boldsymbol{\tau}}) = \boldsymbol{E} \quad (1.22)$$

Willis utilise des arguments purement heuristiques pour justifier l'approximation de l'équation de Lippmann–Schwinger (1.11) par l'équation (1.22) ci-dessus. Il faut néanmoins noter que Willis n'utilise l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22) que pour des domaines Ω dont la taille tend vers l'infini. On conçoit qu'à la limite $|\Omega| \rightarrow \infty$, cette approximation soit valide.

En ce qui nous concerne, nous souhaitons résoudre l'équation de Lippmann–Schwinger sur un VES de taille *finie*. Il est donc nécessaire de donner un sens à l'équation (1.22). En particulier, si cette équation n'est considérée que comme une approximation de l'équation (1.11), alors la raideur apparente pourra au mieux être considérée comme une approximation, même si (1.22) était résolue exactement. Le principe de Hashin–Shtrikman ne permettra donc pas de conférer un statut de borne à cette approximation. Les travaux de Brisard *et al.* (2013a) ont permis d'éclaircir ce point en introduisant des conditions aux limites dites mixtes.

1.1.2.2 Conditions aux limites mixtes

Il faut tout d'abord noter que lorsqu'on travaille sur un VES de taille finie, la raideur apparente dépend des conditions aux limites adoptées. Ainsi, le problème auxiliaire (1.1) permet de définir la raideur apparente $\mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}}$, où l'indice "KUBC" fait référence aux conditions aux limites cinématiques (1.1c) (Kanit *et al.*, 2003). On peut de même, en appliquant des conditions aux limites statiques (SUBC), définir la raideur apparente $\mathbb{C}_{\text{SUBC}}^{\text{app}}$, et l'on a, sous réserve d'homogénéité statistique et d'ergodicité (Sab, 1992) :

$$\mathbb{C}_{\text{SUBC}}^{\text{app}}, \mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{hom}} \quad (1.23)$$

lorsque la taille de Ω tend vers l'infini.

4. Par exemple, si Ω est ellipsoïdal, on a $\mathbb{F}_0^\infty * \varpi = \mathbb{P}_\Omega : \varpi$, où \mathbb{P}_Ω désigne le tenseur de Hill de Ω (associé au matériau \mathbb{C}_0).

Plutôt que de considérer l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22) comme une approximation de l'équation (1.11), Brisard *et al.* (2013a) ont proposé de considérer cette équation comme l'équation d'un nouveau problème auxiliaire, permettant de définir une nouvelle raideur apparente $\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0)$, où l'indice "MBC" fait référence aux conditions aux limites mixtes, introduite ci-après. Il faut noter que cette nouvelle raideur apparente dépend du milieu de référence \mathbb{C}_0 .

$\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0)$ est définie comme suit : soit $\boldsymbol{\tau}$ la solution de l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22). On définit alors les champs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{E} - \mathbb{F}_0^\infty * (\boldsymbol{\tau} - \chi \bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.24a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.24b)$$

et on vérifie que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est compatible, tandis que $\boldsymbol{\sigma}$ est statiquement admissible sur Ω . De plus, si Ω est ellipsoïdal (hypothèse que nous ferons toujours par la suite), on peut montrer que $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{E}$ (Brisard *et al.*, 2013a). Par ailleurs, par linéarité, la moyenne volumique des contraintes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ dépend linéairement du seul paramètre de chargement \boldsymbol{E} , et $\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}$ est définie comme l'opérateur linéaire reliant $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et \boldsymbol{E} :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0) : \boldsymbol{E} \quad (1.25)$$

On peut alors montrer que le tenseur $\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0)$ est symétrique, défini positif et que :

$$\mathbb{C}_{\text{SUBC}}^{\text{app}} \leq \mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0) \leq \mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}} \quad (1.26)$$

ce qui garantit que $\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0) \rightarrow \mathbb{C}^{\text{hom}}$ lorsque la taille du VES Ω tend vers l'infini. L'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22) définit donc bien un problème auxiliaire cohérent du point de vue de l'homogénéisation et dont l'approximation numérique est possible puisque l'opérateur de Green du milieu infini est connu.

Il est possible d'identifier le problème de mécanique associé à l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22). Ce problème correspond à l'équilibre du VES Ω , plongé dans un milieu infini de raideur \mathbb{C}_0 et soumis à des conditions aux limites cinématiques à l'infini et à des forces surfaciques sur le bord de Ω . Les équations de ce problème ne sont pas rappelées ici car elles ne seront pas utilisées dans le présent travail.

1.1.2.3 Principe de Hashin et Shtrikman associé à l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée

Introduisons la fonctionnelle :

$$\mathcal{H}_{\text{MBC}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \bar{\hat{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{E} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \hat{\boldsymbol{\tau}}} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : \mathbb{F}_0^\infty * (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \chi \bar{\hat{\boldsymbol{\tau}}})} \quad (1.27)$$

où $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ est un champ test symétrique supporté dans Ω .

On montre (Brisard *et al.*, 2013a) que \mathcal{H}_{MBC} est stationnaire au point $\boldsymbol{\tau}$ solution de l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22). De plus :

$$\mathbb{C} \leq \mathbb{C}_0 \implies \forall \hat{\boldsymbol{\tau}}, \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}} : \mathbf{E} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \mathcal{H}_{\text{MBC}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.28a)$$

$$\mathbb{C} \geq \mathbb{C}_0 \implies \forall \hat{\boldsymbol{\tau}}, \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}} : \mathbf{E} \geq \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_0 : \mathbf{E} + \mathcal{H}_{\text{MBC}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.28b)$$

En d'autres termes, l'équation de Lippmann–Schwinger modifiée (1.22) précédemment introduite par Willis (1977) permet de produire des bornes rigoureuses sur $\mathbb{C}_{\text{MBC}}^{\text{app}}(\mathbb{C}_0)$, pas sur $\mathbb{C}_{\text{KUBC}}^{\text{app}}$.

Pour conclure ce paragraphe, il faut noter que les résultats qui précèdent ne sont valables que pour un VES Ω ellipsoïdal. Dans ce cas, l'expression (1.27) se simplifie :

$$\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = \bar{\hat{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \hat{\boldsymbol{\tau}}} - \frac{1}{2} \overline{\hat{\boldsymbol{\tau}} : (\mathbb{F}_0^\infty * \hat{\boldsymbol{\tau}})} + \frac{1}{2} \bar{\hat{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbb{P}_\Omega : \bar{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.29)$$

où \mathbb{P}_Ω désigne le tenseur de Hill du VES Ω relatif au milieu de référence \mathbb{C}_0 .

1.2 Formulation variationnelle de la méthode de l'inclusion équivalente

La méthode de l'inclusion équivalente est introduite par Moschovidis et Mura (1975) pour des polarisations polynômiales par morceaux. Les travaux de Berveiller *et al.* (1987) et El Mouden et Molinari (1996) s'apparentent à la méthode de l'inclusion équivalente, pour laquelle les champs de polarisation sont constants par morceaux. Contrairement à Moschovidis et Mura (1975) qui utilisent une méthode de collocation par points pour discrétiser l'équation de Lippmann–Schwinger, Brisard *et al.* (2014) proposent une approche de type Galerkin. Ils introduisent cette méthode dans sa forme variationnelle dans le cas général des polarisations polynômiales. Dans ce qui suit, nous nous basons sur les définitions établies dans ces derniers travaux en nous restreignant au cas particulier des polarisations constantes par morceaux, le but étant d'étendre cette approche à des géométries d'inclusions plus complexes (chap. 2).

1.2.1 Forme faible de l'équation de Lippmann–Schwinger

La méthode de l'inclusion équivalente est dérivée de la forme faible de l'équation de Lippmann–Schwinger (1.11), obtenue en multipliant cette dernière par une fonction test $\boldsymbol{\varpi} \in \mathbb{V}$ et en moyennant sur le VES.

$$\text{Trouver } \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{V} \text{ tel que } a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varpi}) = f(\boldsymbol{\varpi}) \quad \forall \boldsymbol{\varpi} \in \mathbb{V} \quad (1.30)$$

où \mathbb{V} désigne l'espace des polarisations à support dans Ω (la régularité de $\boldsymbol{\tau}$ est analysée dans (Brisard *et al.*, 2014)), $a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varpi})$ est une forme bilinéaire et $f(\boldsymbol{\varpi})$ est une forme linéaire données par :

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varpi}) = \overline{\boldsymbol{\varpi} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \boldsymbol{\tau}} + \overline{\boldsymbol{\varpi} : (\mathbb{F}_0^\infty * (\boldsymbol{\tau} - \chi \bar{\boldsymbol{\tau}}))} \quad (1.31a)$$

$$f(\boldsymbol{\varpi}) = \overline{\boldsymbol{\varpi} : \mathbf{E}} \quad (1.31b)$$

Comme Ω est de forme ellipsoïdale, le théorème d'Eshelby s'applique et on a :

$$\forall \underline{x} \in \Omega \quad (\mathbb{T}_0^\infty * (\chi \bar{\tau}))(\underline{x}) = \mathbb{P}_\Omega : \bar{\tau} \quad (1.32)$$

où \mathbb{P}_Ω est le tenseur de Hill du domaine Ω pour le milieu de référence \mathbb{C}_0 . Cela permet d'écrire la forme bilinéaire a comme :

$$a(\tau, \varpi) = \overline{\varpi : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \tau} + \overline{\varpi : (\mathbb{T}_0^\infty * \tau)} - \overline{\varpi : \mathbb{P}_\Omega : \tau} \quad (1.33)$$

1.2.2 Discrétisation de type Galerkin

Pour les microstructures de type matrice-inclusions, si la matrice est choisie comme milieu de référence ($\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_m$), la polarisation dans la matrice est alors nulle (1.10b). Comme le domaine occupé par une inclusion est relativement petit, ceci suggère, comme première approche, la possibilité de discrétiser le problème variationnel continu (1.30) suivant la procédure de Galerkin sur le sous-espace des polarisations constantes par inclusion. L'équation (1.30) devient :

$$\text{Trouver } \tau \in \mathbb{V}^0 \text{ tel que } a(\tau, \varpi) = f(\varpi) \quad \forall \varpi \in \mathbb{V}^0 \quad (1.34)$$

où \mathbb{V}^0 est l'ensemble des polarisations constantes par morceaux :

$$\tau(\underline{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \chi_\alpha(\underline{x} - \underline{x}_\alpha) \tau_\alpha \quad (1.35)$$

avec χ_α la fonction caractéristique de l'inclusion α centrée sur l'origine du repère.

Le problème variationnel discrétisé (1.34) est réduit à un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients τ_α du développement (1.35). D'après les calculs présentés dans (Brisard *et al.*, 2014), on trouve successivement :

$$f(\varpi) = \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha \varpi_\alpha : \mathbf{E} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} a(\tau, \varpi) &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha \varpi_\alpha : (\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} : \tau_\alpha \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \varpi_\alpha : \mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha) : \tau_\beta + \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N v_\alpha \varpi_\alpha : \mathbb{P}_\alpha : \tau_\alpha \\ &- \frac{1}{V^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N v_\alpha v_\beta \varpi_\alpha : \mathbb{P}_\Omega : \tau_\alpha \end{aligned} \quad (1.37)$$

où la fonction test ϖ est discrétisée comme τ (1.35), v_α est le volume de l'inclusion α et V le volume du domaine Ω .

$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{r})$ est le tenseur d'influence relatif aux inclusions α et β défini comme suit :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{r}) = \int_{\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \Gamma_0^\infty(\underline{r} + \underline{y} - \underline{x}) dV_x dV_y \quad (1.38)$$

Le problème variationnel (1.34) est équivalent au système linéaire suivant :

$$\underbrace{v_\alpha \left((\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} + \mathbb{P}_\alpha - \frac{v_\alpha}{V} \mathbb{P}_\Omega \right)}_{\mathbb{D}_\alpha} : \boldsymbol{\tau}_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \underbrace{\left(\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha) - \frac{v_\alpha v_\beta}{V} \mathbb{P}_\Omega \right)}_{\mathbb{H}_{\alpha\beta}} : \boldsymbol{\tau}_\beta = v_\alpha \mathbf{E} \quad (1.39)$$

d'inconnues $\boldsymbol{\tau}_\alpha$.

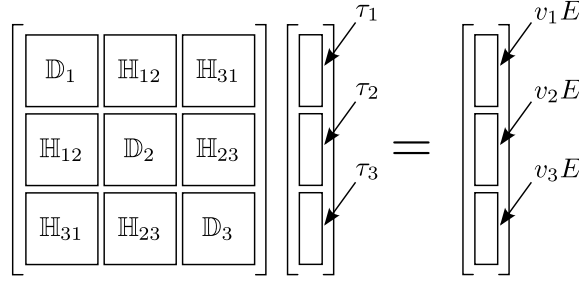


FIGURE 1.1 – Schéma d'assemblage de la matrice du système (1.39) avec trois inclusions.

La matrice du système (1.39) est assemblée par blocs, comme le représente la figure 1.1. Les blocs de la diagonale correspondent à la représentation de Mandel–Voigt des tenseurs d'ordre 4 \mathbb{D}_α et les blocs hors-diagonale à celle des tenseurs $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$. La matrice du système est pleine. Sous certaines conditions sur la rigidité de référence⁵, elle est définie positive ou négative. On préfère ne pas diviser le système (1.39) par v_α afin de préserver sa symétrie.

1.2.3 Estimation de la déformation et de la contrainte dans les inclusions

La résolution du système (1.39) permet d'obtenir une estimation de la polarisation $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ dans l'inclusion α . Par analogie avec l'équation (1.10b), valable pour la solution exacte de l'équation de Lippmann–Schwinger, nous introduisons les estimations suivantes de la déformation et de la contrainte :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = (\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} : \boldsymbol{\tau}_\alpha \quad (1.40a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \mathbb{C}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \quad (1.40b)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ et $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ désignent respectivement les estimations par la méthode de l'inclusion équivalente de la déformation et de la contrainte dans l'inclusion α .

Il est ainsi possible, outre l'estimation de (ou la borne sur le) comportement apparent, d'estimer les champs locaux dans chaque inclusion.

5. les mêmes conditions que celles évoquées pour le principe de Hashin et Shtrikman (1.14)

1.3 Forces et faiblesses de la méthode de l'inclusion équivalente

On a vu dans les paragraphes précédents que la méthode de l'inclusion équivalente opère sur des champs décrits de manière simplifiée. Cela rend son utilisation pratique, surtout quand il s'agit de traiter un grand nombre de réalisations, mais lui confère un caractère approché. Le principe de Hashin et Shtrikman permet en plus, dans certains cas, de situer cette approximation par rapport à la valeur exacte des grandeurs recherchées. Dans ce qui suit, nous présentons des applications qui montrent quelques usages qu'on peut faire de la méthode de l'inclusion équivalente et qui permettent d'illustrer quelques aspects de ses avantages et de ses limites.

1.3.1 Calcul de propriétés apparentes

L'article (Brisard *et al.*, 2014) fait une comparaison entre la méthode de l'inclusion équivalente et une référence calculée aux éléments finis. L'expérience consiste à calculer par la méthode de l'inclusion équivalente le module de cisaillement apparent d'une microstructure polydisperse bidimensionnelle circulaire poreuse [(élasticité plane)] (déformations planes). Elle contient 400 inclusions (pores) et la matrice est de module de cisaillement μ_0 .

La borne sur le module apparent μ^{app} est calculée pour des polarisations polynômiales de degrés 0, 1, 2 et 3.

On observe que l'erreur relative par rapport à une référence calculée aux éléments finis diminue d'une manière *exponentielle* avec le nombre de degrés de liberté. L'augmentation de l'ordre de la méthode améliore significativement la borne supérieure sur μ^{app} dans ce cas bidimensionnel. De plus, le nombre de degrés de libertés pour l'EIM reste très inférieur à la méthode des éléments finis.

Une pareille expérience est conduite pour des microstructures 3D. On observe toujours dans ce cas une amélioration de la borne sur le module de cisaillement apparent en fonction du nombre de degrés de libertés, mais cette amélioration est moins importante que dans le cas bidimensionnel. Il est probable qu'il soit nécessaire d'avoir recours à des polynômes de degré plus élevé dans le cas tridimensionnel pour obtenir une bonne estimation des modules d'élasticité apparents.

Le présent exemple montre la capacité de la méthode de l'inclusion équivalente à estimer les propriétés macroscopiques d'une microstructure. La borne sur le module de cisaillement macroscopique est calculée ici par une moyenne statistique sur un ensemble de microstructures isotropes. La méthode de l'inclusion équivalente à l'ordre 0 n'est souvent pas meilleure que les bornes de Hashin et Shtrikman pour un tel calcul. En dehors de l'isotropie, il est difficile de relier la définition théorique d'une distribution à la disposition géométrique concrète des inclusions (notamment pour le schéma de Ponte Castañeda et Willis (1995), qui est une extension des bornes de Hashin et Shtrikman à des distributions spatiales anisotropes, la notion de distribution ellipsoïdale reste floue). La méthode de l'inclusion équivalente donne ainsi plus de liberté quant à la définition des distributions dans les microstructures. Le calcul d'un champ par phase que permettent les méthodes en champs moyens est remplacé par le calcul de ce champ par inclusion. D'ailleurs, cette dernière particularité peut être exploitée pour étudier des propriétés locales, comme le montre l'application ci-dessous.

1.3.2 Calcul de champs locaux

Dans la famille des méthodes basées sur le formalisme de l'opérateur de Green, la méthode de l'inclusion équivalente a la particularité de pouvoir quantifier les interactions locales entre inclusions. Elle permet d'obtenir des estimations des champs dans chaque inclusion. Une fois le champ de polarisation calculé (1.39), les déformations et contraintes locales peuvent être estimées par les équations (1.40a) et (1.40b).

Du fait de la nature de l'opérateur de Green (décroissance en r^{-d} , (1.18)), on s'attend à ce que les voisines directes d'une inclusion aient plus d'influence sur elle que les inclusions éloignées. Cependant, on ne sait pas à partir de quelle distance cette influence devient négligeable (la décroissance de l'opérateur de Green étant considérée *lente*, cette distance peut être grande). Ainsi, nous proposons dans ce qui suit une application dans laquelle nous mettons en valeur la capacité de la méthode de l'inclusion équivalente à quantifier la *portée des interactions élastiques*, c'est-à-dire, le point à partir duquel l'augmentation de la taille du voisinage d'une inclusion n'influence que peu les champs dans cette dernière. Les résultats calculés par la méthode de l'inclusion équivalente seront confrontés à des calculs aux éléments finis.

Pour quantifier cette portée des interactions élastiques, nous allons étudier l'évolution de la déformation dans une inclusion en fonction de la taille de son entourage (par exemple, du rayon du domaine qui contient toutes les inclusions du voisinage rapporté au rayon de l'inclusion étudiée). Afin d'étudier uniquement l'interaction entre les inclusions, il est préférable de se passer des effets du bord. Toutes les inclusions seront alors plongées dans un milieu infini (fig. 1.2) de rigidité de référence \mathbb{C}_0 et dont le déplacement à l'infini se comporte comme $\mathbf{E}^\infty \cdot \underline{x}$. On commence l'étude par considérer une unique inclusion plongée dans ce milieu infini, et on augmente peu à peu son entourage par l'ajout de nouvelles inclusions.

Nous avons introduit préalablement l'équation de Lippmann–Schwinger qui utilise l'opérateur de Green du milieu infini (1.22) avec la correction de Willis. Dans la présente application, il ne s'agit pas d'utiliser l'opérateur de Green du milieu infini pour un domaine borné, du coup, la correction de Willis n'est pas nécessaire. Nous allons en effet utiliser l'équation de Lippmann–Schwinger classique (1.11) dans laquelle l'opérateur de Green est bien celui du milieu infini et le produit $\mathbb{T}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}$ est un véritable produit de convolution. Le problème à résoudre est équivalent à l'équation de Lippmann–Schwinger du domaine infini, définie comme suit :

$$(\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)^{-1} : \boldsymbol{\tau} + \mathbb{T}_0^\infty * \boldsymbol{\tau} = \mathbf{E}^\infty \quad (1.41)$$

L'inclusion dans laquelle on cherche à étudier la déformation se trouve au centre du domaine ; les inclusions du voisinage sont ajoutées par ordre de leurs distances à cette inclusion centrale.

Contrairement à la méthode de l'inclusion équivalente, le calcul aux éléments finis ne permet pas de considérer [un bord infini] un milieu infini. Le domaine infini peut alors être remplacé par un domaine de grande taille (par rapport à la taille des inclusions) de manière à réduire les effets de bord. Ainsi, le plus petit domaine contenant toutes les inclusions sera lui même plongé au centre de ce milieu de grande taille (Fig. 1.3) dont la rigidité est la même que le milieu de référence. Les inclusions sont dans ce cas loin du bord et les champs locaux ne sont affectés que peu par la présence de ce dernier.

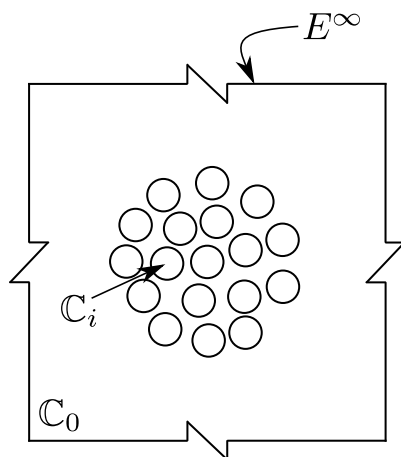


FIGURE 1.2 – Inclusions plongées dans un domaine infini. Schéma du problème correspondant à l'équation (1.41).

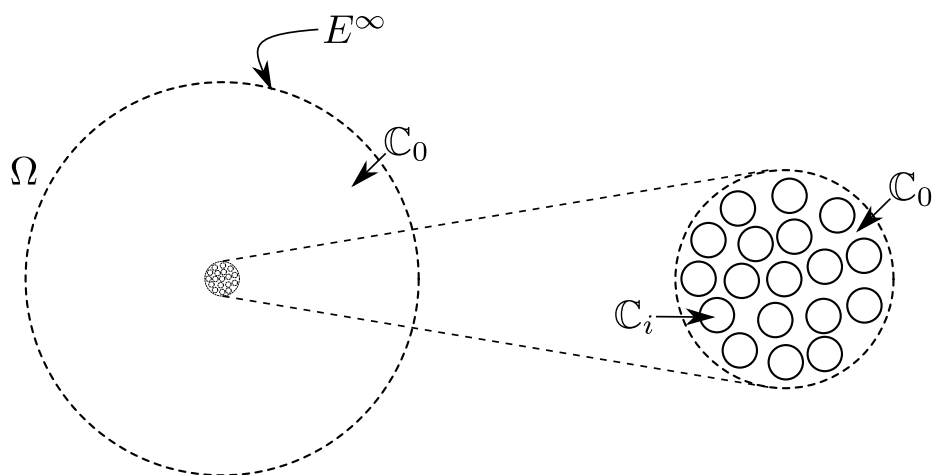


FIGURE 1.3 – Schéma de la microstructure considérée pour le calcul aux éléments finis.

Le maillage est généré par l'algorithme **Netgen3D** avec une subdivision des circonférences des inclusions à 12 éléments et de celle du bord du domaine à 20 éléments. La figure 1.4 montre

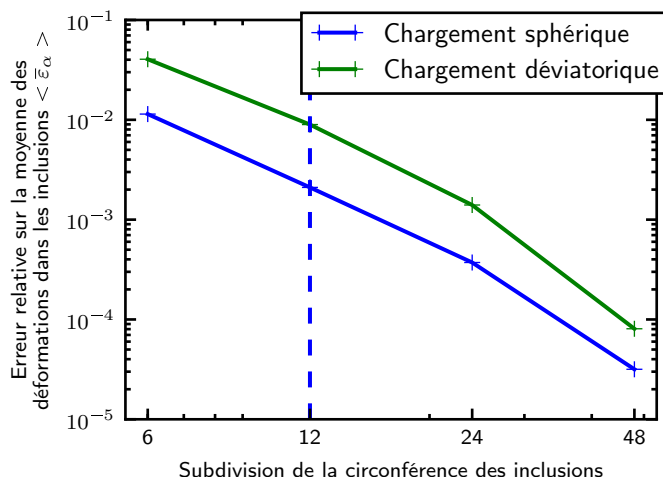


FIGURE 1.4 – Étude de la finesse du maillage. Erreur relative sur la moyenne des déformations dans les inclusions dans les cas du chargement sphérique ($\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$) et déviatorique (ε_{12}). La ligne en pointillé correspond à la finesse utilisée dans le présent calcul. La référence correspond à une subdivision de la circonférence des inclusions à 72 éléments et du bord à 120 éléments. Tous les calculs sont effectués sur des éléments quadratiques.

que la finesse du maillage considérée correspond à des erreurs relatives de l'ordre de 1%.

Remarque. Pour calculer l'effet de l'augmentation de la taille du voisinage d'une inclusion, un seul maillage peut suffire. La prise en compte ou non d'une inclusion dans le voisinage consiste à lui affecter tantôt le matériau de la matrice, tantôt celui des inclusions.

Les résultats des calculs effectués ici peuvent être présentés de deux manières :

- dans un premier temps, nous nous intéressons aux niveaux des déformations dans toutes les inclusions. On compare les résultats obtenus par la méthode de l'inclusion équivalente à ceux obtenus par un calcul aux éléments finis (§ 1.3.2.1),
- dans un second temps, nous nous intéresserons uniquement à la déformation dans l'inclusion centrale en fonction de la taille de son voisinage (§ 1.3.2.2).

1.3.2.1 Comparaison des champs de déformation

La première analyse qu'on peut faire pour le calcul proposé consiste à comparer les déformations des inclusions calculées par la méthode de l'inclusion équivalente et par éléments finis. On se fixe une microstructure de 36 inclusions circulaires monodisperses. Le rapport entre le diamètre d'une inclusion ($2a$) et le diamètre du plus petit domaine contenant l'ensemble des inclusions est de l'ordre de $1/10$.

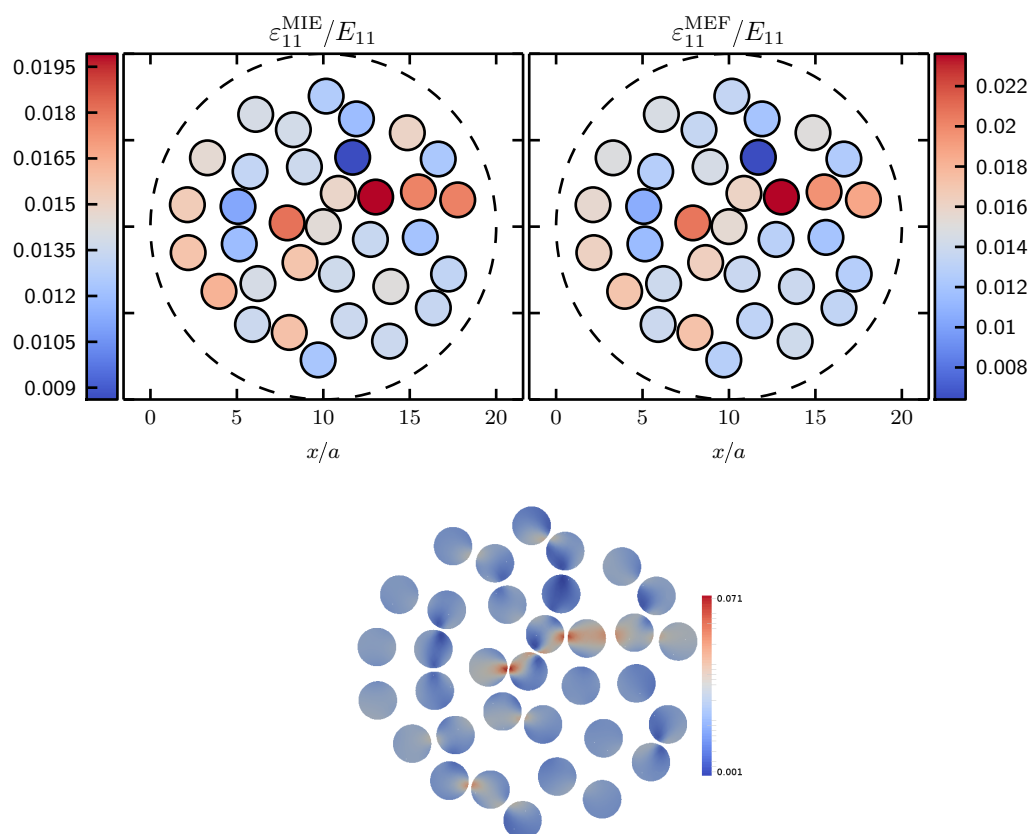


FIGURE 1.5 – Cartographie de la déformation dans les inclusions d’une microstructure de rapport $r/a = 10$ sous chargement sphérique. Les calculs sont effectués par la méthode de l’inclusion équivalente (gauche) et la méthode des éléments finis (droite - le champ locale est présentée en bas).

La figure 1.5 représente une cartographie de la déformation ε_{11} dans les inclusions de la microstructure étudiée, sous sollicitation sphérique à l'infini. On observe un écart entre les valeurs des déformations obtenues par les deux méthodes. Cependant, les deux cartes affichent le même contraste, ce qui suggère une sorte d'homothétie entre les valeurs des déformations provenant des deux méthodes.

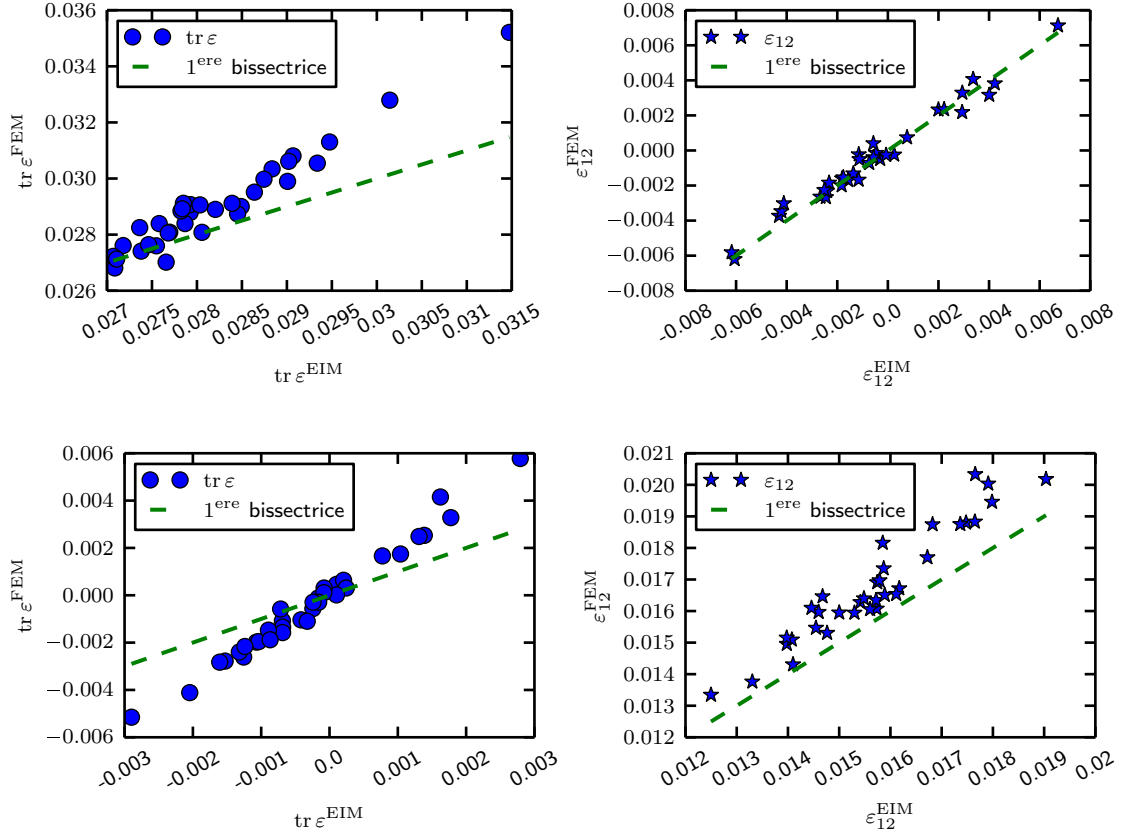


FIGURE 1.6 – Relation entre la déformation calculée par méthode de l'inclusion équivalente (abscisses) et par éléments finis (ordonnées) sous le cas d'un chargement sphérique (haut) et déviatorique (bas). Les résultats sont situés par rapport à la première bissectrice.

Cette relation homothétique est vérifiée par les graphes de la figure 1.6 qui donnent la relation entre la déformation calculée par éléments finis en fonction de la déformation calculée par la méthode de l'inclusion équivalente. Les résultats correspondent aux sollicitations sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ et déviatorique $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$. À part le graphe qui compare les déformations de cisaillement sous chargement déviatorique (où la dispersion est un peu plus élevée), on observe une relation linéaire entre la déformation $\varepsilon_{ij}^{\text{EIM}}$ et $\varepsilon_{ij}^{\text{FEM}}$.

L'écart remarqué entre les deux résultats peut être expliqué par le caractère approché de la méthode de l'inclusion équivalente qui utilise des champs simplifiés et par l'approximation du domaine infini par un domaine fini pour les calculs aux éléments finis. Néanmoins, l'écart induit

par l'approximation du domaine infini par un domaine fini semble tout de même petit devant l'utilisation des champs simplifiés pour la méthode de l'inclusion équivalente.

1.3.2.2 Portée des interactions élastiques

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la déformation uniquement dans une inclusion qu'on a placée au centre du domaine et dont on augmente le voisinage au fur et à mesure. Les calculs sont poussés jusqu'à un voisinage de 827 inclusions (le rapport entre le diamètre d'une inclusion et le diamètre du plus petit domaine qui contient toutes les inclusions est de l'ordre de 1/50). On considère les sollicitations sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ et déviatorique $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$.

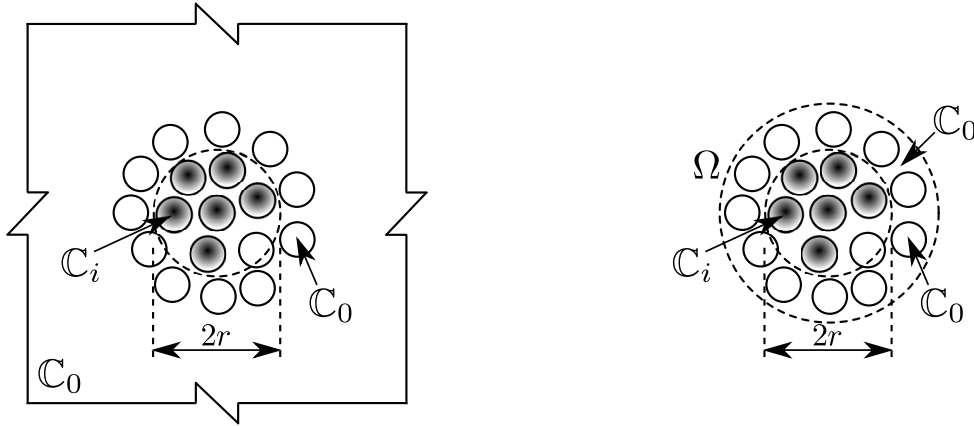


FIGURE 1.7 – Les inclusions sont plongées dans une matrice de rigidité C_0 . Le voisinage de taille r comprend toutes les inclusions se trouvant à l'intérieur d'une distance r du centre de l'inclusion étudiée.

La courbe 1.8 représente le suivi de la partie sphérique de la déformation dans l'inclusion centrale en fonction de la taille du voisinage r , la sollicitation étant sphérique également. La figure 1.9 présente l'évolution de la déformation de cisaillement de l'inclusion centrale en fonction de la taille du voisinage r , le domaine étant sous sollicitation déviatorique. Le premier point de ces courbes correspond à une inclusion plongée dans un milieu infini. La déformation de cette inclusion (notée α) est donnée par la solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby⁶ (Eshelby, 1957) :

$$\varepsilon_\alpha = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_\alpha : (C_\alpha - C_0)]^{-1} : \mathbf{E}^\infty \quad (1.42)$$

La déformation ε_α est influencée par la suite par l'ajout des voisines. Comme attendu, l'influence des inclusions les plus proches est plus grande que celles qui sont plus éloignées, ce qui est vérifié ici par l'existence d'une asymptote sur ε_α pour les grandes distances r . On remarque par ailleurs

6. qui est en fait un cas particulier de la méthode de l'inclusion équivalente.

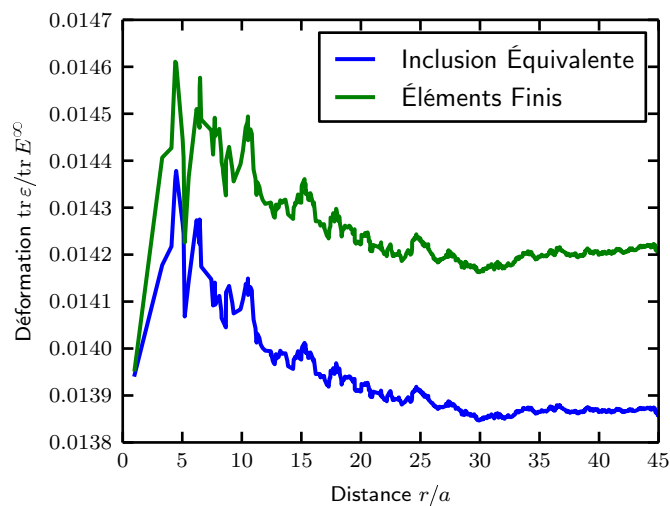


FIGURE 1.8 – Déformation dans l'inclusion centrale en fonction de la taille du voisinage r . Courbes provenant du calcul aux éléments finis et de la méthode de l'inclusion équivalente.

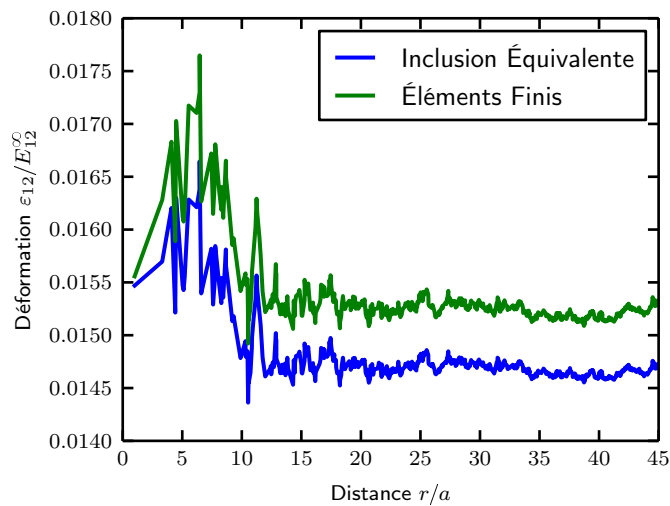


FIGURE 1.9 – Déformation déviatorique dans l'inclusion centrale en fonction de la taille du voisinage r . Courbes de la méthode de l'inclusion équivalente et des éléments finis sur grand domaine.

que l'asymptote n'est atteinte que pour des distances *très* grandes [($r > 20a$ pour la sollicitation sphérique et $r > 10a$ pour la sollicitation déviatorique).] ($r > 20a$). On rappelle qu'une inclusion n'est prise en compte que quand elle est complètement à l'intérieur du domaine de diamètre $2r$, comme le montre la figure 1.7. Ainsi, le volume occupé par les inclusions évolue par paliers, ce qui explique la forte variation de la déformation au début des courbes.

On note sur les deux graphiques 1.8 et 1.9 un écart d'environ 5% entre les courbes provenant des calculs aux éléments finis et par la méthode de l'inclusion équivalente. Comme on l'a fait remarquer précédemment, cet écart provient du caractère approché de la méthode (polarisations uniformes par inclusion) et des approximations effectuées (remplacement du domaine infini par un domaine fini pour les calculs aux éléments finis).

Que ce soit dans le cas de chargement sphérique ou déviatorique, on remarque une similitude entre les courbes provenant des calculs aux éléments finis et de la méthode de l'inclusion équivalente. Bien qu'il y ait un écart, les courbes des deux calculs varient de la même manière et l'écart se stabilise à peine le cas du problème d'Eshelby dépassé. Les deux courbes finissent par atteindre une asymptote. Le point où cette asymptote est atteinte correspond à la portée des interactions élastiques.

Comme les courbes ne sont pas lisses, cette portée n'est pas déterminée d'une manière exacte. Il est en plus plus judicieux de la déterminer sur un grand nombre de réalisations. On attire également l'attention sur le fait que, la plupart du temps, la déformation sous un chargement déviatorique atteint plus vite l'asymptote que sous un chargement sphérique. En outre, les portées trouvées pour les calculs locaux sont plus grandes que les tailles des VES utilisés en pratique pour la détermination des propriétés macroscopiques.

Pour conclure, la méthode de l'inclusion équivalente à l'ordre 0 n'est pas quantitative sur le niveau de déformation, mais sur la portée des interactions élastiques. [Elle donne, outre la détermination d'une borne ou d'une estimation des propriétés macroscopiques, la possibilité de quantifier un aspect d'interaction entre les inclusions avec beaucoup moins de degrés de libertés que la méthode des éléments finis.] Elle donne, outre la détermination d'une borne ou d'une estimation des propriétés macroscopiques, la possibilité de quantifier un aspect d'interaction entre les inclusions et déterminer l'hétérogénéité des champs mécaniques avec beaucoup moins de degrés de liberté que la méthode des éléments finis. La méthode de l'inclusion équivalente est utilisée d'une manière pratique pour des microstructures à inclusions sphériques. La prise en compte de l'hétérogénéité nécessite la possibilité de faire varier le rapport d'aspect des inclusions. Ceci est l'objectif du chapitre suivant qui s'intéresse à l'extension de la méthode de l'inclusion équivalente à des inclusions ellipsoïdales.

Chapitre 2

Extension de la méthode de l'inclusion équivalente aux inclusions ellipsoïdales

Dans sa version la plus simple, la méthode de l'inclusion équivalente consiste à résoudre la forme variationnelle de l'équation de Lippmann–Schwinger sur le sous-espace des champs de polarisations constantes par inclusion. Une extension naturelle de cette méthode consiste à donner une forme polynômiale aux polarisations dans les inclusions. Cette extension permet d'améliorer la borne (ou l'estimation) calculée par la méthode. L'amélioration est d'autant plus grande que le degré des polynômes est élevé (Brisard *et al.*, 2014).

Une autre façon d'enrichir la méthode de l'inclusion équivalente consiste à considérer des inclusions non plus sphériques, mais ellipsoïdales. Cela nécessite de calculer le tenseur de Hill et les tenseurs d'influence associés à ce type d'inclusions. Le premier est connu analytiquement dans le cas des ellipsoïdes de révolution (Eshelby, 1957). Pour un ellipsoïde quelconque, il est calculé numériquement. Le calcul du tenseur d'influence de deux ellipsoïdes est l'objet du présent chapitre. Deux approches ont été utilisées pour aborder ce calcul :

- Développement multipolaire (Brisard *et al.*, 2013b)
- Intégration numérique dans l'espace de Fourier (Berveiller *et al.*, 1987)

Ces deux approches sont développées ci-après. Chacune d'entre elles a des avantages et des limites qui rendent l'application de la méthode de l'inclusion équivalente à des inclusions ellipsoïdales plus complexe que dans le cas de sphères. D'un point de vue pratique, on utilisera l'approche par intégration dans l'espace de Fourier pour des inclusions rapprochées et on remplacera le tenseur d'influence d'inclusions éloignées par les termes dominants de son développement multipolaire.

2.1 Tenseur d'influence de deux ellipsoïdes

Comme on l'a vu au chapitre 1, l'assemblage de la matrice du système linéaire résolu dans le cadre de la méthode de l'inclusion équivalente nécessite de calculer les tenseurs d'influence pour chaque paire d'inclusions. Ces derniers sont définis par le biais de l'opérateur de Green \mathbb{T}_0^∞ . Leur

expression analytique est connue pour des inclusions sphériques (Berveiller *et al.*, 1987; Brisard *et al.*, 2014). Dans ce qui suit, nous allons définir les paramètres géométriques nécessaires au calcul de ce tenseur pour des inclusions ellipsoïdales.

Le calcul du tenseur d'influence de deux sphères s'effectue naturellement dans un repère associé aux centres (c'est-à-dire dans lequel la troisième direction correspond à l'axe passant par les centres des deux inclusions). Cela permet de prendre en compte la symétrie de révolution du problème. Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales, il n'y a en général pas de symétrie de révolution. Notre expérience montre qu'il est alors plus commode de se placer dans un repère lié aux axes propres de l'une des inclusions.

On considère donc deux inclusions ellipsoïdales α et β occupant les domaines Ω_α et Ω_β . Les inclusions sont centrées en \underline{x}_α et \underline{x}_β . Les rayons des ellipsoïdes seront notés respectivement $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ et $a_\beta, b_\beta, c_\beta$.

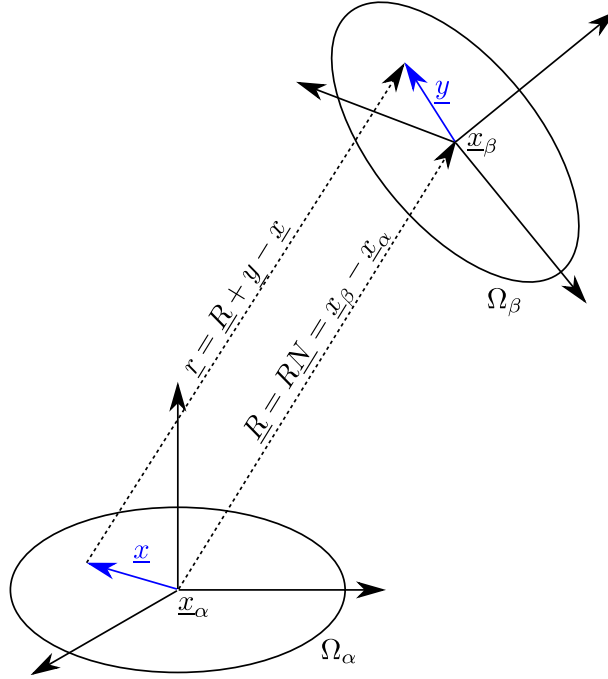


FIGURE 2.1 – Schéma géométrique du problème de deux ellipsoïdes

Remarque. Pour le calcul des tenseurs d'influence, les deux méthodes présentées ci-après sont applicables à tout type d'ellipsoïde. Dans un souci de simplification, nous nous restreindrons dans les applications au cas d'ellipsoïdes de révolution¹. Les axes des inclusions sont orientés dans ce cas par les vecteurs \underline{d}_α et \underline{d}_β , correspondant respectivement aux directions des rayons polaires.

On note $\underline{R} = RN = \underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha$ le vecteur d'origine \underline{x}_α et d'extrémité \underline{x}_β , tel que $\underline{N} = \underline{R}/\|\underline{R}\|$ et

1. Dans ce cas, a_α (resp. c_α) désignera le rayon polaire (resp. équatorial) de l'inclusion α .

$R = ||\underline{R}||$. Pareillement, pour un couple de points $(\underline{x}, \underline{y})$ on note $\underline{r} = \underline{R} + \underline{y} - \underline{x}$.

On cherche à calculer le tenseur d'influence de deux ellipsoïdes plongés dans un milieu infini. Ce tenseur est égal à l'intégrale double de l'opérateur de Green du milieu infini \mathbb{T}_0^∞ sur les domaines délimités par les inclusions α et β (voir Eq. (1.38)) :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \int_{\underline{y} \in \Omega_\beta} \mathbb{T}_0^\infty(\underline{R} + \underline{y} - \underline{x}) dV_y dV_x \quad (2.1)$$

2.2 Développement limité d'ordre 2 du tenseur d'influence

Cette méthode, introduite par Brisard *et al.* (2014), consiste à remplacer le noyau de Green par son développement multipolaire selon les puissances de $(y_i - x_i)/R$. Chaque terme de ce développement (il s'agit de simples polynômes des x_i et y_i) peut alors être intégré analytiquement sur les deux inclusions.

En toute rigueur, cette démarche ne conduit pas à une valeur exacte du tenseur d'influence, mais à une approximation, qui est d'autant meilleure que les inclusions sont éloignées et que l'ordre du développement asymptotique est élevé. Néanmoins, on constate dans le cas d'inclusions sphériques que ce développement est en fait *fini* : il comporte seulement des termes d'ordre 0 et d'ordre 2.

Cette approche peut être étendue à des inclusions de forme quelconque. Néanmoins, contrairement aux sphères, le développement asymptotique n'est pas fini (les termes d'ordre élevé ne s'annulent pas). Les expressions deviennent rapidement inexploitables lorsque l'ordre augmente. On se restreindra ici à un développement limité à l'ordre 2.

En partant de la définition du tenseur d'influence (2.1), on pose $\underline{R} = R\underline{N}$ et $\underline{\xi} = \frac{\underline{y} - \underline{x}}{R}$ de sorte que :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \int_{\underline{y} \in \Omega_\beta} \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \mathbb{T}_0^\infty(R(\underline{N} + \underline{\xi})) dV_x dV_y = \frac{1}{R^d} \int_{\underline{y} \in \Omega_\beta} \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \mathbb{T}_0^\infty(\underline{N} + \underline{\xi}) dV_x dV_y \quad (2.2)$$

D'après la définition intrinsèque de la partie régulière de l'opérateur de Green (1.18), on peut montrer que le développement limité d'ordre 2 du tenseur d'influence peut s'écrire sous cette forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{v_\alpha v_\beta}{16\pi\mu_0(1-\nu_0)||\underline{R}||^3} [& (-\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + 2(1-2\nu_0)\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}) U_{\alpha\beta} \\ & + 6\boldsymbol{\delta} \otimes^s \mathbf{V}_{\alpha\beta} + 12\nu_0 \boldsymbol{\delta} \otimes^s \mathbf{V}_{\alpha\beta} - 15\mathbb{W}_{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

où :

$$U_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{v_\alpha v_\beta} \int_{\underline{x}, \underline{y}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) ||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-d} dV_x dV_y \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{v_\alpha v_\beta} \int_{\underline{x}, \underline{y}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) ||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+2)} (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) dV_x dV_y \quad (2.4b)$$

$$\mathbb{W}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{v_\alpha v_\beta} \int_{\underline{x}, \underline{y}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) ||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+4)} (\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} dV_x dV_y \quad (2.4c)$$

tels que v_α est le volume de l'inclusion α .

Les trois grandeurs (scalaire, tensorielle d'ordre 2 et tensorielle d'ordre 4) :

$$\frac{1}{||\underline{N} + \underline{\xi}||^d} \quad \frac{(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi})}{||\underline{N} + \underline{\xi}||^{d+2}} \quad \frac{(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi})}{||\underline{N} + \underline{\xi}||^{d+4}} \quad (2.5)$$

apparaissent dans l'expression de l'opérateur de Green d'ordre 4 du milieu infini (1.18). Elles ne font pas intervenir les constantes élastiques du matériau de référence. Il est nécessaire de les développer et les intégrer sur Ω_α et Ω_β pour obtenir le développement de $U_{\alpha\beta}$, $\mathbf{V}_{\alpha\beta}$ et $\mathbb{W}_{\alpha\beta}$. Le développement limité est effectué à l'ordre 2 en $\underline{\xi}$.

Tous calculs faits, on trouve, à l'ordre 2 :

$$U_{\alpha\beta}(\underline{R}) = 1 - \frac{d}{2} \text{tr} \frac{\mathbf{J}_{\alpha\beta}}{R^2} + \frac{d(d+2)}{2} \underline{N} \cdot \frac{\mathbf{J}_{\alpha\beta}}{R^2} \cdot \underline{N} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\alpha\beta}(\underline{R}) &= \underline{N} \otimes \underline{N} + \frac{1}{R^2} \mathbf{J}_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{d+2}{R^2} (\underline{N} \otimes \mathbf{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N} + \underline{N} \cdot \mathbf{J}_{\alpha\beta} \otimes \underline{N}) \\ &\quad + \frac{d+2}{2R^2} (-\text{tr} \mathbf{J}_{\alpha\beta} + (d+1) \underline{N} \cdot \mathbf{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N}) \underline{N} \otimes \underline{N} \end{aligned} \quad (2.6b)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{\alpha\beta}(\underline{R}) &= \left(1 - \frac{d+4}{2R^2} \text{tr} \mathbf{J}_{\alpha\beta} + \frac{(d+4)(d+6)}{2R^2} \underline{N} \cdot \mathbf{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N} \right) \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \\ &\quad - \frac{d+4}{R^2} \underline{N} \otimes (\mathbf{P} \otimes \mathbf{J}_{\alpha\beta} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{J}_{\alpha\beta}) \cdot \underline{N} \\ &\quad - \frac{d+4}{R^2} \underline{N} \cdot (\mathbf{J}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{J}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{P}) \otimes \underline{N} \\ &\quad + \frac{2}{R^2} \mathbf{P} \otimes^s \mathbf{J}_{\alpha\beta} + \frac{4}{R^2} \mathbf{P} \otimes^s \mathbf{J}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.6c)$$

où $\mathbf{I}_\alpha = \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \underline{x} \otimes \underline{x} dV_x$ est le tenseur d'inertie de l'inclusion α , $\mathbf{J}_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{I}_\alpha}{v_\alpha} + \frac{\mathbf{I}_\beta}{v_\beta}$ et $\mathbf{P} = \underline{N} \otimes \underline{N}$.

Finalement, le développement limité à l'ordre 2 de l'expression intrinsèque du tenseur d'influence de deux ellipsoïdes conduit à une expression simple, où la géométrie est séparée du matériau et les données géométriques des deux inclusions sont découplées.

2.3 Intégration numérique du tenseur d'influence

Une seconde approche pour calculer les tenseurs d'influence consiste à résoudre le problème dans l'espace de Fourier (Berveiller *et al.*, 1987). Quoique les développements soient faits dans le cas général d'ellipsoïdes, l'expression analytique des tenseurs d'influence peut être trouvée uniquement dans le cas des sphères. El Mouden et Molinari (2000) se sont basés sur cette approche pour calculer les tenseurs d'influence d'inclusions ellipsoïdales. Ils n'ont néanmoins pas discuté la précision du calcul qui requiert une attention particulière, comme nous le montrerons ci-après.

Dans ce qui suit, nous utilisons une formulation intrinsèque de l'approche de Berveiller *et al.* (1987). Celle-ci a l'avantage de donner des expressions indépendantes de l'orientation des inclusions et dont l'implémentation numérique est simple.

2.3.1 Principe du calcul

Nous cherchons à calculer le tenseur $\mathbb{T}_{\alpha\beta}$ défini par l'équation (1.38). Le principe de la méthode consiste à calculer le produit de convolution apparaissant dans cette expression dans l'espace de Fourier, ce qui donne après simplifications (voir annexe B) :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9v_\alpha v_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{n}) dS_n \quad (2.7)$$

où $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})$ est une fonction définie par morceaux, \underline{n} est un vecteur unitaire de la même direction que la variable de Fourier \underline{k} ($\underline{k} = k\underline{n}$) et r_α (resp. r_β) est défini comme suit :

$$r_\alpha = \sqrt{(\underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha)^2 + (\underline{n} \cdot \underline{b}_\alpha)^2 + (\underline{n} \cdot \underline{c}_\alpha)^2} \quad (2.8)$$

La décomposition (1.18) permet finalement d'écrire :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{2\mu_0} (\delta \otimes \underline{D} + \underline{D} \otimes \delta) - \frac{1}{2\mu_0(1-\nu_0)} \mathbb{Q} \quad (2.9)$$

où \underline{D} et \mathbb{Q} sont respectivement un tenseur d'ordre 2 et un tenseur d'ordre 4 indépendants du matériau :

$$\underline{D}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9v_\alpha v_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \underline{n} \otimes \underline{n} dS_n \quad (2.10)$$

$$\mathbb{Q}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9v_\alpha v_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS_n \quad (2.11)$$

Lorsque les inclusions sont sphériques, r_α et r_β se réduisent respectivement aux rayons des inclusions α et β et l'expression de $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})$ peut être simplifiée et calculée analytiquement (Berveiller *et al.*, 1987).

Dans le cas d'ellipsoïdes, les expressions ne se simplifient pas. Il est nécessaire d'évaluer cette intégrale numériquement.

Remarque. Le passage aux cas limites (inclusions infiniment aplaties ou infiniment allongées) ne permet pas non plus d'avoir des expressions analytiques des tenseurs d'influence.

2.3.2 Schéma d'intégration numérique

La qualité d'une intégration numérique dépend du nombre de points d'intégration de l'intégrande ainsi que de la distribution de ces points. Comme il s'agit d'intégrer sur une sphère ($||\underline{n}|| = 1$), nous cherchons à distribuer régulièrement les points d'intégration dessus. Une telle distribution peut être obtenue par exemple par raffinement d'un icosaèdre régulier (Atkinson, 1982).

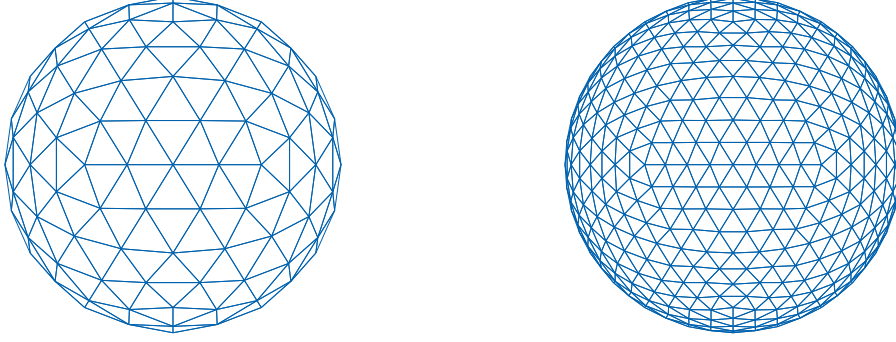


FIGURE 2.2 – Raffinement successif de l'icosaèdre. À gauche, le raffinement de niveau 2 (320 facettes, soit, 320 points d'intégration). À droite, le raffinement de niveau 3 (1280 facettes). Pour raffiner l'icosaèdre, chaque arête curviligne est découpée en deux. Les nouveaux sommets permettent de diviser chaque facette en quatre nouvelles facettes, comme le montre la figure 2.3.

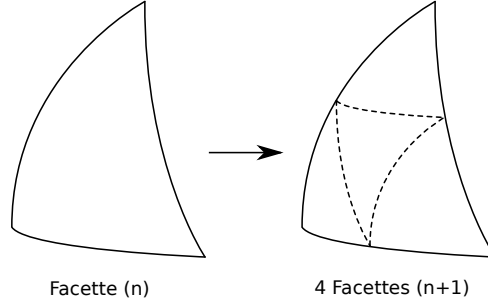
La figure 2.2 montre un exemple de raffinement successif d'un icosaèdre. La fonction à intégrer est évaluée au centre de chaque facette. Ainsi, l'intégrale G d'une fonction $g(\underline{n})$ est approximée de la façon suivante :

$$G = \int_{||\underline{n}||=1} g(\underline{n}) dS \approx \sum_{i=1}^N g(\underline{n}_i) \Delta S_i \quad (2.12)$$

où les ΔS_i sont les aires des triangles curvilignes de l'icosaèdre raffiné et les \underline{n}_i sont les projections des barycentres des sommets de ces triangles sur la sphère contenant l'icosaèdre.

Remarque. Le niveau 0 de raffinement désigne l'icosaèdre de base à 20 faces. Le nombre de faces N (autrement dit, nombre de points d'intégration) dans un icosaèdre de raffinement de niveau n est donné par :

$$N = 20 \times 4^n \quad (2.13)$$

FIGURE 2.3 – Raffinement d’une facette d’un niveau n au niveau $n + 1$

2.4 Validation des deux approches

2.4.1 À propos des deux approches

Nous avons présenté dans ce qui précède deux approches pour le calcul du tenseur d’influence de deux ellipsoïdes :

- Approximation par le développement multipolaire
- Intégration numérique

Le développement multipolaire d’ordre 2 est exactement égal au tenseur d’influence pour des inclusions sphériques. L’écart de ce développement à la valeur exacte du tenseur d’influence $\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}\underline{N})$ est influencé par deux données :

- rapport d’aspect des ellipsoïdes : l’écart est d’autant plus petit que le rapport d’aspect est proche de 1 (cas des sphères),
- distance centre à centre : l’écart est d’autant plus petit que la distance R est grande.

En ce qui concerne le calcul numérique des tenseurs d’influence, sa précision est très influencée par la discrétisation de l’intégrande $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n}) / (r_\alpha^3 r_\beta^3)$ et par le schéma d’intégration. En outre, contrairement au développement multipolaire, la précision de cette approximation est d’autant plus grande que les inclusions sont rapprochées.

Ainsi, les deux approches paraissent complémentaires ; quand les deux inclusions sont proches, le calcul par intégration numérique est plus favorable, tandis que le développement multipolaire est plus favorable dans le cas contraire. Il est à noter que le temps de calcul par intégration numérique est très long par rapport au développement multipolaire. Il est ainsi plus souhaitable de réduire autant que possible l’usage de l’intégration numérique.

2.4.2 Analyse de la précision de l’intégration numérique

Pour avoir une idée de la précision, on a calculé, par intégration numérique, les tenseurs d’influence relatifs à plusieurs configurations géométriques où l’on a fait varier la position relative \underline{R} des deux inclusions et leurs orientations (\underline{d}_α et \underline{d}_β). Les calculs sont effectués pour un certain nombre de degrés de raffinement de l’icosaèdre d’intégration (§ 2.3.2) dans les cas géométriques suivants :

- deux sphères,
- deux ellipsoïdes allongés,
- deux ellipsoïdes aplatis,
- deux ellipsoïdes mixtes (allongé et aplati).

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'erreur relative sur ces tenseurs d'influence. Cette dernière correspond à la norme de Frobenius de la différence entre le tenseur calculé $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{int}}$ et la référence $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}$, divisée par la norme de Frobenius de la référence :

$$\text{Err} = \frac{\|\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{int}} - \mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}\|_{\text{fro}}}{\|\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}\|_{\text{fro}}} \quad (2.14)$$

La référence est connue analytiquement dans le cas des sphères. Dans le cas des ellipsoïdes, on se réfère à des calculs par intégration numérique avec un degré de raffinement élevé.

Inclusions sphériques

Un calcul de l'erreur relative sur les tenseurs d'influence est effectué sur deux inclusions sphériques de rayons respectifs $r_\alpha = 0.11$ et $r_\beta = 0.23$. Nous définissons la distance réduite $\bar{r} = \frac{R}{r_\alpha + r_\beta}$ où $\bar{r} = 1$ correspond au cas d'inclusions tangentes. Le calcul est effectué pour $\bar{r} \in \{1.0, 1.1, 1.5, 3.0\}$. La direction de la ligne des centres $\underline{N} = \underline{R}/R$ parcourt les 80 sommets de l'icosaèdre raffiné une fois.

Les graphiques de la figure 2.4 représentent les moyennes des erreurs relatives sur les tenseurs d'influence calculés numériquement et les courbes des erreurs maximales et minimales.

La précision évolue en $m^{-1.20}$, où m est le nombre d'évaluations de l'intégrande. La même évolution a été remarquée par Atkinson (1982) dans une étude de l'erreur relative d'une intégration par raffinement successif d'icosaèdre. On remarque également que la précision diminue avec l'augmentation de la distance \bar{r} .

Ces courbes montrent également que l'orientation relative (qui n'a pas de sens d'un point de vue géométrique) a une grande influence sur les résultats².

Remarque. On observe les mêmes remarques par rapport à l'erreur relative sur les composantes du tenseur d'influence (indépendantes du matériau) $\mathbf{D}_{\alpha\beta}(\underline{R})$ (2.10) et $\mathbb{Q}_{\alpha\beta}(\underline{R})$ (2.11) calculées indépendamment.

Ellipsoïdes allongés

Le calcul suivant est effectué sur deux ellipsoïdes de révolution allongés, de rayons : $a_\alpha = 0.11, c_\alpha = 0.6$ pour l'ellipsoïde α et $a_\beta = 0.23, c_\beta = 0.7$ pour l'ellipsoïde β . Nous définissons la distance réduite comme suit : $\bar{r} = \frac{R}{a_\alpha + a_\beta}$. On note que les ellipsoïdes se recouvrent dans

2. En fait, l'orientation relative \underline{N} influe sur l'intégrande $F(r_\alpha, r_\beta, RN \cdot \underline{n})$, ce qui peut conduire à un écart sur le calcul numérique des tenseurs d'influence de sphères. Cet écart est plus important quand il y a peu de points d'intégration.

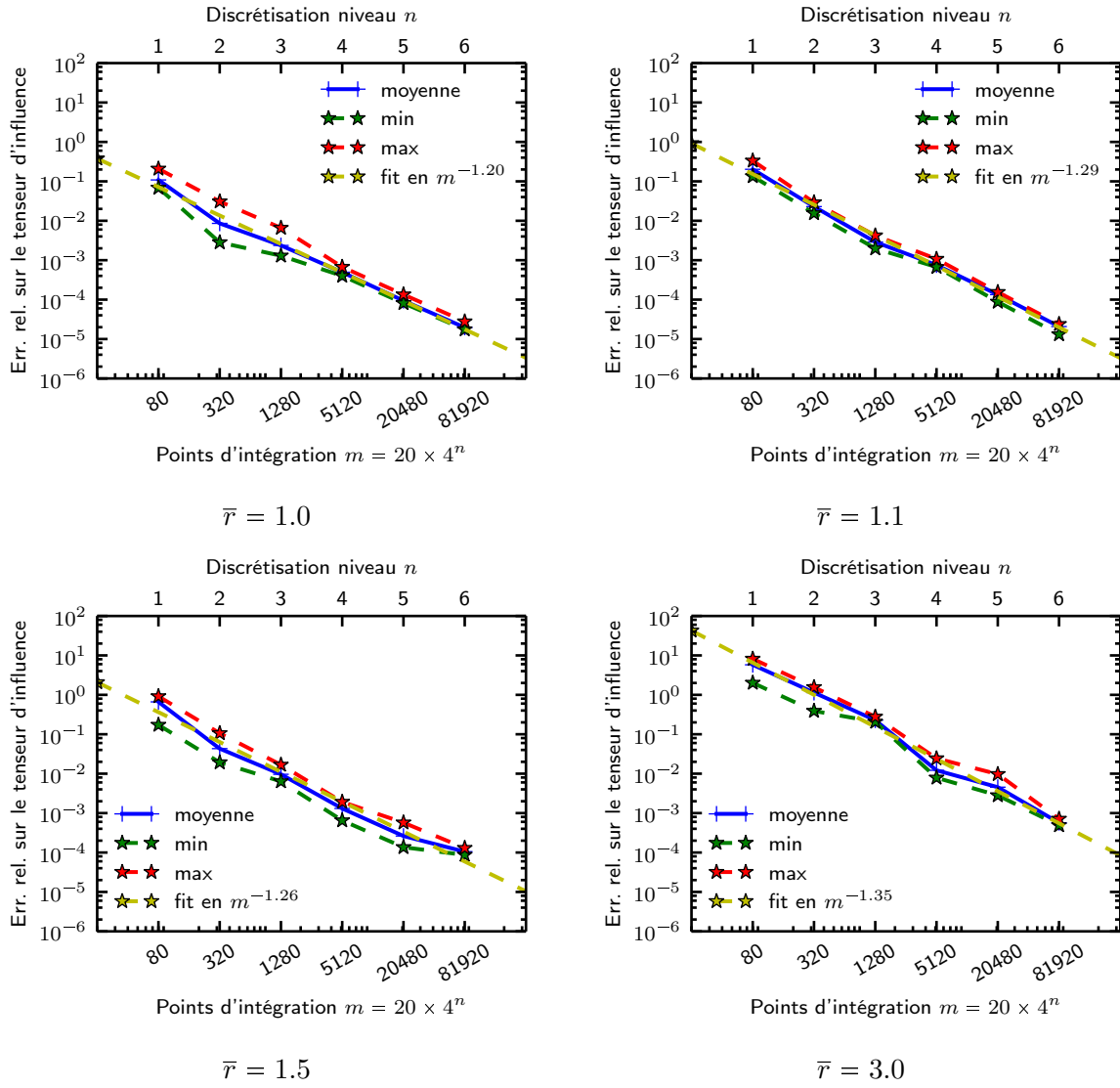


FIGURE 2.4 – Erreur relative sur le tenseur d'influence de deux sphères

certain cas, mais comme il s'agit d'évaluer une précision numérique, on ne s'est pas attardé sur la physique du problème. Le calcul est effectué pour $\bar{r} \in \{2.4, 2.6, 3.6, 7.0\}$. $\bar{r} = 1$ correspond au cas des deux inclusions tangentes par leur petits rayons.

Pour ces inclusions ellipsoïdales, la référence est calculée numériquement avec un niveau de raffinement élevé de l'icosaèdre ($n = 8$, 1.310.720 évaluation d'intégrande). L'erreur relative correspond à la norme de Frobenius de la différence entre le tenseur calculé et la référence, divisée par la norme de Frobenius de la référence (eq. 2.14).

La direction de la ligne des centres \underline{N} parcourt les 20 sommets de l'icosaèdre de base et on considère 42 cas d'orientations relatives (vecteurs \underline{d}_α et \underline{d}_β).

Comme dans le cas des sphères, la précision évolue en $m^{-1.20}$, où m est le nombre d'évaluations de l'intégrande. Aussi, la précision diminue avec l'augmentation de la distance centre-à-centre.

Les niveaux de l'erreur relative pour les ellipsoïdes est comparable au cas des sphères, mais la dispersion des résultats est plus grande, ce qui marque l'influence des orientations des ellipsoïdes (\underline{d}_α et \underline{d}_β).

Dans les cas des inclusions aplaties et mixtes, on obtient les mêmes remarques que dans le cas des ellipsoïdes allongés.

L'étude de la précision du calcul numérique des tenseurs d'influence a montré que l'erreur relative sur l'approximation diminue régulièrement en fonction de la discrétisation du domaine d'intégration. Pour un raffinement de l'icosaèdre de niveau 6 par exemple, l'erreur relative est de l'ordre de 10^{-5} mais augmente rapidement quand les inclusions s'éloignent. Cette perte de précision peut être expliquée par la taille du support de l'intégrande qui diminue avec l'augmentation de la distance R , comme le montre la figure 2.6. Le schéma d'intégration utilisé semble alors peu convenable dans ces cas (§ 2.3.2). Cela nous pousse en pratique à nous restreindre à des distances R assez limitées pour le calcul par intégration numérique.

2.4.3 Analyse de la précision du développement multipolaire

On s'intéresse dans ce qui suit à la possibilité d'approximer un tenseur d'influence par son développement multipolaire. La qualité de l'approximation est étudiée en fonction de la distance entre deux inclusions.

Dans les calculs qui suivent, on considère deux inclusions ellipsoïdales dont on fixe la géométrie (rayons a_α et c_α), l'orientation (\underline{N}) et les vecteurs qui orientent les ellipsoïdes (\underline{d}_α et \underline{d}_β). L'erreur relative sur les tenseurs d'influence est calculée en fonction de la distance R :

$$\text{Err} = \frac{||\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{tay}} - \mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}||_{\text{fro}}}{||\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}||_{\text{fro}}} \quad (2.15)$$

où $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{tay}}$ est le tenseur d'influence calculé par développement multipolaire et $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{ref}}$ est le tenseur de référence. Ce dernier est calculé par intégration numérique d'ordre élevé (ordre 8 avec 1 310 720 points d'intégration).

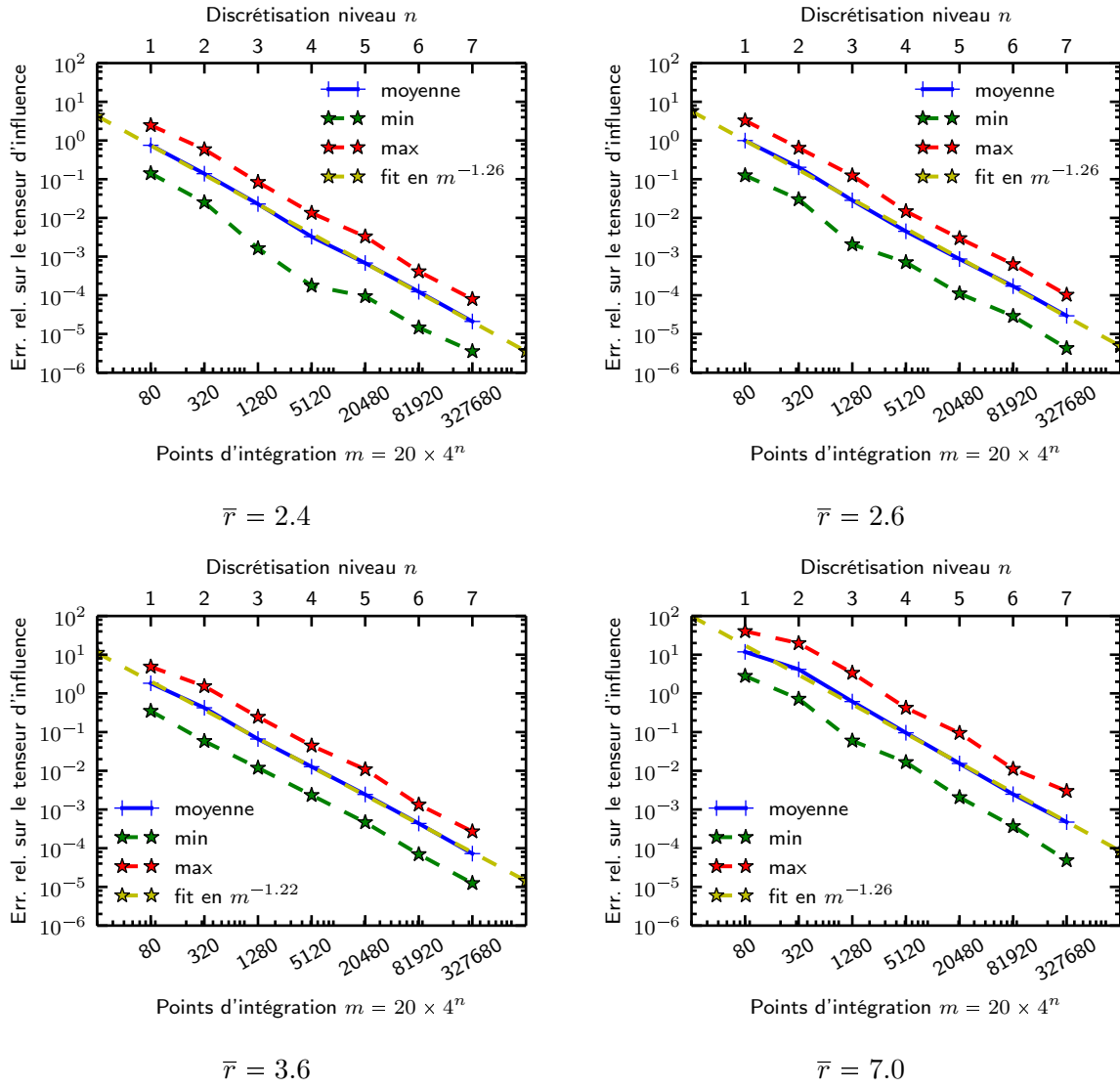
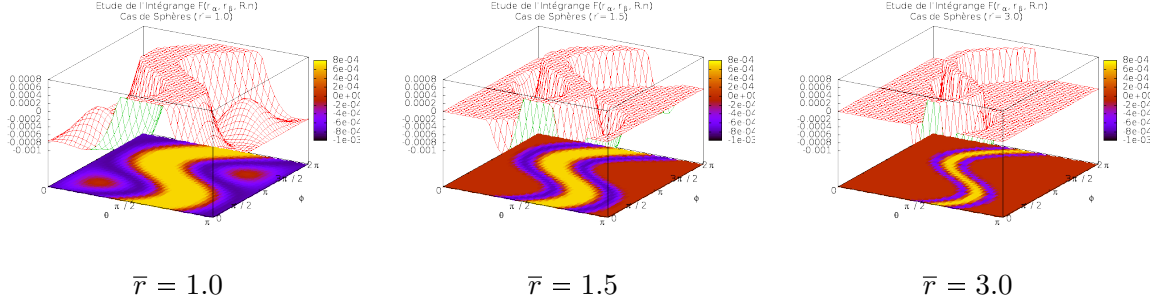


FIGURE 2.5 – Erreur relative sur le tenseur d'influence de deux ellipsoïdes allongés

FIGURE 2.6 – Support de l'intégrande $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})/(r_\alpha^3 r_\beta^3)$

Pour l'application numérique présentée ci-dessous, on fixe la direction $\underline{N} = 0.476 \underline{e}_1 + 0.345 \underline{e}_2 + 0.809 \underline{e}_3$ et les orientations $\underline{d}_\alpha = 0.800 \underline{e}_1 + 0.750 \underline{e}_2 + 0.500 \underline{e}_3$ et $\underline{d}_\beta = \underline{e}_3$. Quant à la géométrie des ellipsoïdes, on considère les quatre cas définis à la table 2.1.

Cas	a_α	c_α	a_β	c_β	Description
cas 1	0.11	0.60	0.23	0.70	Ellipsoïdes aplatis
cas 2	0.60	0.11	0.70	0.23	Ellipsoïdes allongés
cas 3	0.11	0.60	0.70	0.23	Ellipsoïdes mixtes
cas 4	0.11	0.20	0.23	0.30	Ellipsoïdes aplatis

TABLE 2.1 – Géométries des ellipsoïdes de révolution utilisés dans les calculs de la figure 2.7

La figure 2.7 représente l'évolution de l'erreur relative Err en fonction de la distance R entre les deux inclusions. Comme attendu, l'erreur décroît avec la distance. On distingue en général trois zones sur les courbes des résultats :

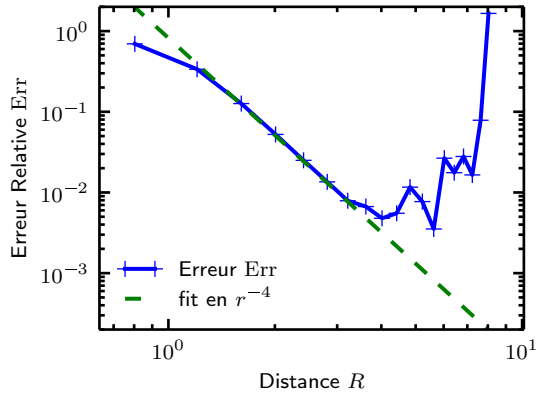
- sur des courtes distances, le développement $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^{\text{tay}}$ n'est pas représentatif du tenseur,
- sur des distances moyennes, on remarque une décroissance de l'erreur Err en R^{-4} ,
- à la troisième zone (longues distances), la référence est elle même entachée d'erreur, vu qu'elle provient d'une intégration numérique.

En ce qui concerne la vitesse de décroissance, les équations (2.3) et (2.6) montrent qu'on peut écrire le développement limité d'ordre 2 sous la forme suivante :

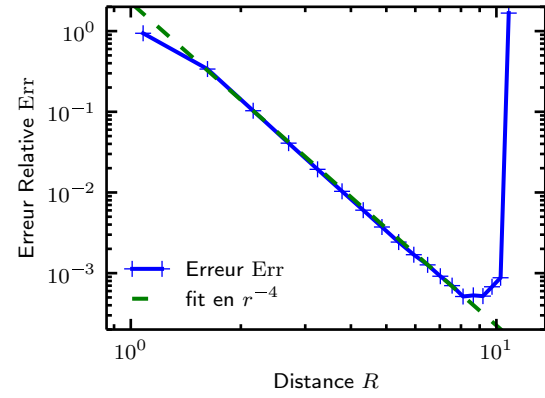
$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(R\underline{N}) = \frac{1}{R^3} \mathbb{A}_{\alpha\beta}(\underline{N}) + \frac{1}{R^5} \mathbb{B}_{\alpha\beta}(\underline{N}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^7}\right) \quad (2.16)$$

où $\mathbb{A}_{\alpha\beta}(\underline{N})$ et $\mathbb{B}_{\alpha\beta}(\underline{N})$ sont des tenseurs d'ordre 4 indépendants de la distance R . Ceci explique la décroissance de l'erreur relative en R^{-4} (ou la décroissance de l'erreur absolue en R^{-7}).

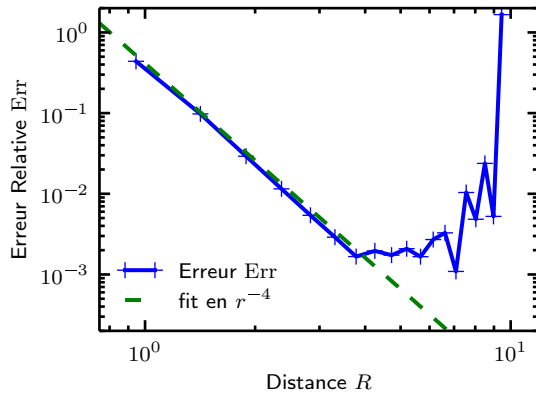
Le développement multipolaire représente une bonne approximation au tenseur d'influence quand la distance R entre les inclusions est grande. Les courbes représentées à la figure 2.7 affichent une erreur de l'ordre de 1×10^{-3} . On est assuré que cette erreur continue de décroître en R^{-4} pour les grandes distances R .



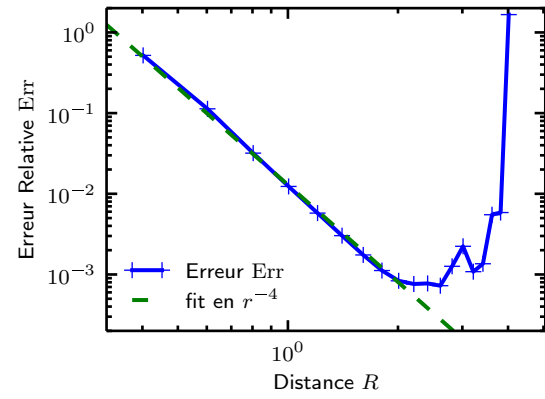
cas 1



cas 2



cas 3



cas 4

FIGURE 2.7 – Erreur relative sur le développement limité d'ordre 2 en fonction de la distance entre inclusions

2.4.4 Première détermination d'une *distance de transition*

Dans le but de calculer le tenseur d'influence, l'intégration numérique peut être utilisée pour une paire d'inclusions rapprochées et le développement multipolaire peut servir d'approximation dans le cas d'inclusions éloignées. Ainsi, il est nécessaire de définir un critère géométrique qui permet de décider si deux inclusions sont rapprochées ou éloignées. Ce critère est une distance de transition, qu'on notera r_0 , correspondant au point où la précision de la méthode de Berveiller *et al.* devient inférieure à la précision du développement multipolaire. En utilisant ces deux méthodes, la précision de calcul des tenseurs d'influence est la moins élevée quand les deux inclusions se trouvent à la distance r_0 .

Il y a plusieurs paramètres qui influencent la précision du calcul des tenseurs d'influence : la distance R , les orientations des inclusions \underline{d}_α et \underline{d}_β et la position relative des inclusions \underline{N} . On rappelle également que le rapport d'aspect $\rho_\alpha = c_\alpha/a_\alpha$ participe à l'augmentation de l'erreur relative sur le tenseur d'influence quand on s'éloigne de la forme sphérique.

Pour avoir un ordre de grandeur de cette distance de transition pour un rapport d'aspect donné, on réalise une étude exhaustive sur plusieurs configurations géométriques où l'on fait varier les paramètres \underline{N} , \underline{d}_α , \underline{d}_β et R (comme au paragraphe 2.4.2 - cas des ellipsoïdes). On considère le cas de deux inclusions aplaties semblables de rapport d'aspect $\rho = 1/8$.

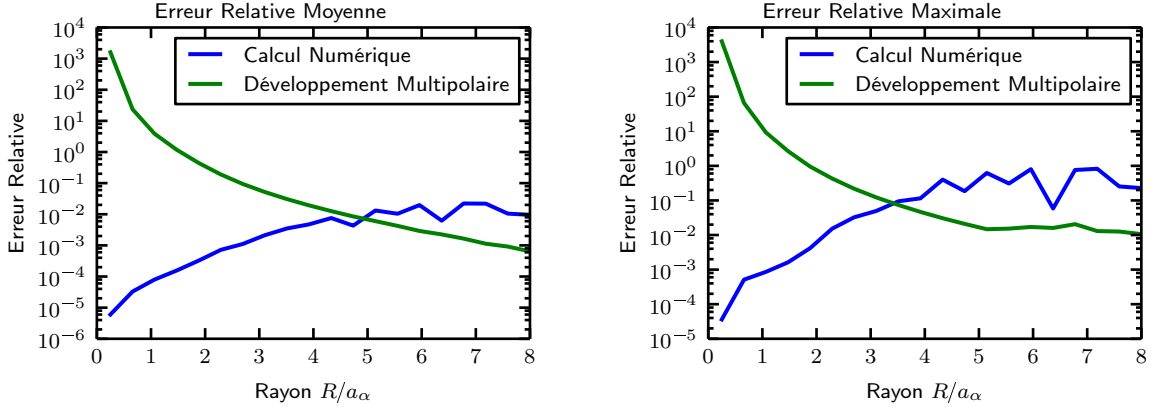


FIGURE 2.8 – Erreur relative sur le tenseur d'influence. Moyenne et valeur maximale du calcul exhaustif.

La figure 2.8 représente l'évolution de l'erreur relative en fonction de la distance R . Sont représentées, la valeur maximale et la moyenne de l'erreur relative sur les orientations \underline{N} , \underline{d}_α et \underline{d}_β . L'erreur relative maximale est de l'ordre de 7%, mais elle ne dépasse pas 1% en moyenne. Le point d'intersection des courbes de précision des deux méthodes définit la distance de transition. Pour cet exemple, $r_0 \approx 4a_\alpha$.

Globalement sur une microstructure, la majorité des tenseurs est calculée avec des précisions supérieures à la précision minimale garantie par les courbes de la figure 2.8. L'effet de la faible précision sur un nombre limité de tenseurs d'influences est ainsi atténué au niveau d'une microstructure complète. En outre, les calculs effectués ici concernent des inclusions de rapport

d'aspect de $1/8$. Quand les inclusions sont moins élancées (ou moins allongées), la précision de ces tenseurs est améliorée.

Nous montrerons dans ce qui suit une application où l'on étudie l'influence de la précision des tenseurs d'influence sur celle d'un calcul global.

2.5 Application : « portée » des interactions élastiques

L'étude présentée au paragraphe 1.3.2.1 est une application qui permet de quantifier les portées des interactions mécaniques entre inclusions dans une microstructure bidimensionnelle à inclusions sphériques. Les applications que nous présentons ci-dessous suivent le même principe. L'intérêt sera porté à l'étude de l'effet que subit une inclusion, sphérique ou ellipsoïdale, par son voisinage (portée des interactions élastiques).

Dans le présent chapitre, nous avons proposé une méthodologie de calcul des tenseurs d'influence. Contrairement au cas des sphères, les tenseurs d'influence des ellipsoïdes sont calculés avec une précision limitée. Les courbes de la figure 2.8 garantissent une précision minimale. L'intervalle sur lequel cette précision est faible reste néanmoins limité sur l'échelle de la microstructure car on remarque que peu d'inclusions se trouvent à une distance qui correspond à la précision minimale. On peut ainsi penser que de calcul sur une microstructure entière ne soit pas très pénalisé si la précision minimale des tenseurs d'influence est faible.

En effet, le système linéaire issu de la méthode de l'inclusion équivalente comporte des grandeurs qui quantifient l'effet sur le champ de polarisation dans une inclusion par la géométrie de cette inclusion même (tenseurs de Hill) et par le contraste entre son matériau et le milieu de référence (ces termes d'auto-influence forment les blocs de la diagonale du système). Les tenseurs d'influence permettent d'ajouter à l'équation l'effet de la présence d'autres inclusions dans le domaine étudié (ils composent les blocs hors-diagonale). La prise en compte de l'effet du bord (qui ne sera pas considérée dans les exemples qui suivent où le domaine est infini) est assurée par la correction de Willis (1977). La contribution de chacun de ces éléments est différente selon la géométrie d'une microstructure et les matériaux constitutifs. On constate, d'après l'application en 2D du même type (§ 1.3.2.1 - fig. 1.8 et fig. 1.9) que la valeur asymptotique de la déformation dans l'inclusion centrale (entourée de son voisinage) dévie significativement de la déformation dans cette même inclusion, considérée isolément (problème Eshelby). En d'autres termes, la contribution des blocs hors-diagonale du système (1.39) est importante.

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode de l'inclusion équivalente à des microstructures 3D d'inclusions sphériques et ellipsoïdales :

- la microstructure aux inclusions sphériques est extraite de celle du béton B11 qui est représentative de la granulométrie d'un béton réel d'une enceinte de centrale nucléaire (Dunant *et al.*, 2013). Cette microstructure peut constituer une référence pour comparer la portée des interactions élastiques,
- le deuxième calcul est effectué sur une microstructure à inclusions ellipsoïdales. Les calculs seront effectués pour un certain nombre de distances de transition (2.4.4) afin d'illustrer l'importance de l'étude de ce paramètre. Les inclusions sont des ellipsoïdes de révolution

d'éclatement relativement grand afin d'augmenter l'effet de la perte de précision des tenseurs d'influence.

L'effet local des interactions entre inclusions est évalué dans tout ce qui suit par le biais de la polarisation estimée dans des inclusions qui se trouvent au centre des microstructures.

2.5.1 Inclusions plongées dans un domaine infini

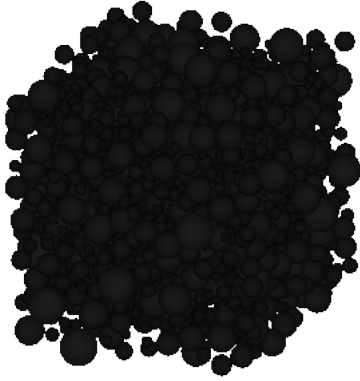
Afin d'éviter les effets de bord, les inclusions sont plongées dans un milieu infini du même matériau que la matrice. Comme cela a été discuté au paragraphe 1.3.2.1, l'annulation de l'effet de bord consiste à résoudre l'équation de Lippmann–Schwinger en utilisant l'opérateur de Green du milieu infini sans prendre en compte la correction du bord fini. L'équation de Lippmann–Schwinger relative à ce problème est définie à (1.41).

Cela revient alors à résoudre le système (1.39) en faisant tendre le volume du domaine vers l'infini :

$$v_\alpha \left((\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} + \mathbb{P}_\alpha \right) : \boldsymbol{\tau}_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mathbb{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) : \boldsymbol{\tau}_\beta = v_\alpha \mathbf{E} \quad (2.17)$$

2.5.2 Microstructure à inclusions sphériques

Dans ce qui suit, on applique la méthode de l'inclusion équivalente à des sous-structures sphériques extraites de la microstructure *B11* (fig. 2.9). Cette dernière est une microstructure



Fraction volumique $f = 0.402\%$

Nombre d'inclusions $n = 2024$

Diamètre des inclusions : $0.043 \leq \frac{2a}{L} \leq 0.402$

FIGURE 2.9 – Détails de la microstructure *B11* (Dunant *et al.*, 2013).

polydisperse qui idéalise le béton d'une enceinte d'une centrale nucléaire. Elle est générée en vue de simulations considérant des conditions aux limites périodiques. La sous-structure sphérique qu'on extrait contient toutes les sphères dont les centres se trouvent à une distance $D/2$ du centre de la boîte, où D est le diamètre maximal de l'amas des inclusions ($D = 2 \times 0.0758$). Le nombre d'inclusions à l'intérieur de D est $n = 1059$ et $0.0032 \leq a \leq 0.0124$ où a désigne le diamètre des inclusions.

On normalise par le module de cisaillement du milieu de référence $\mu_0 = 1$ et on considère le même coefficient de Poisson pour le milieu de référence et les inclusions $\nu_1 = \nu_0 = 0.2$. Les inclusions sont très rigides par rapport à la matrice : $\mu_i = 100\mu_0$.

En reprenant le même principe de calcul que l'exemple 1.3.2.1, on commence le calcul par considérer l'inclusion centrale de l'amas. La polarisation dans ce cas correspond à la solution du problème d'Eshelby (1.42) qui s'écrit pour la polarisation comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \left[(\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} + \mathbb{P}_\alpha \right]^{-1} : \mathbf{E}^\infty \quad (2.18)$$

La taille des inclusions du voisinage est paramétrée par la distance r . On considère alors toutes les inclusions dont le centre est à une distance inférieure à r du centre de l'inclusion centrale, comme le montre la figure (fig. 2.10).

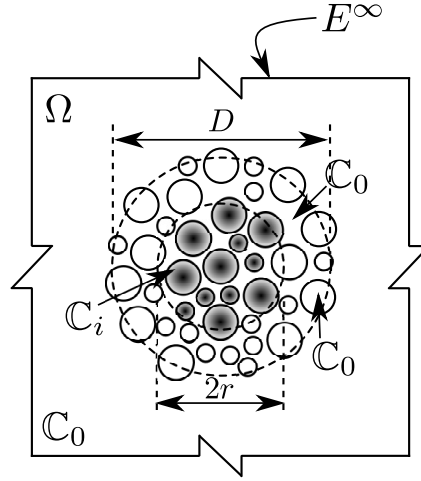


FIGURE 2.10 – Amas d'inclusions polydisperses plongées dans un milieu infini et modalité de choix des inclusions du voisinage étudié.

La figure 2.11 représente les résultats du calcul. La polarisation est suivie (dans le repère global) pour les trois inclusions les plus proches du centre de l'amas. Comme attendu, on remarque que la polarisation varie beaucoup quand la taille du voisinage des inclusions étudiées n'est pas grand, mais elle atteint une asymptote pour les grands voisinages. L'asymptote est atteinte à partir d'une distance qui fait 4 fois le rayon de l'inclusion la plus grande. Le début de la courbe relative à l'inclusion (0) correspond bien à la solution du problème d'Eshelby.

On remarque cependant que le fait de prendre en compte une inclusion du moment où son centre se trouve à une distance inférieure à r du centre de l'amas conduit à une évolution très instable du volume cumulé des inclusions. Pour avoir une évolution de ce volume plus stable et représentative de la microstructure étudiée, on va considérer uniquement la calotte de l'inclusion qui se trouve à l'intérieur du rayon r du voisinage. L'influence d'une inclusion β qui intersecte le bord d'un voisinage de taille r sera alors pondérée par le ratio du volume v'_β de la calotte

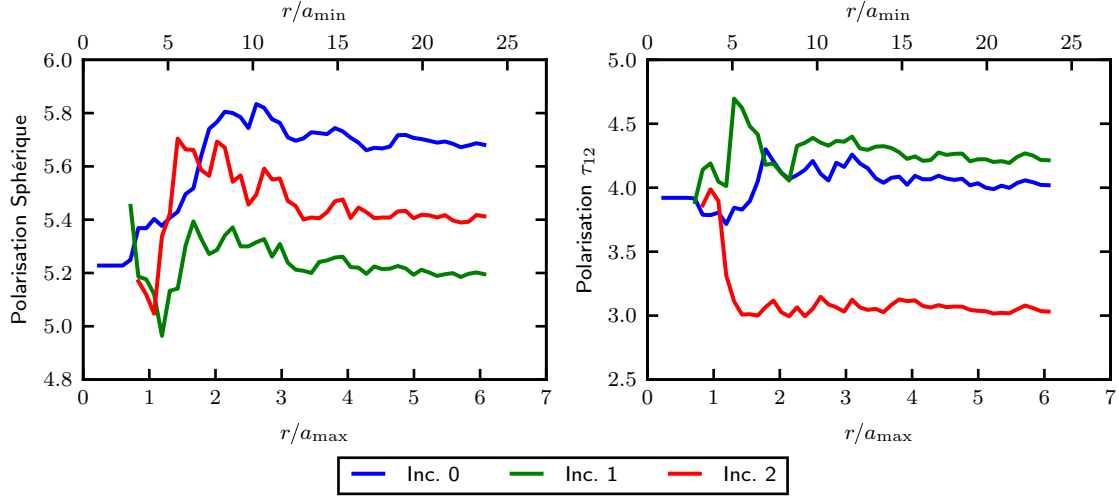


FIGURE 2.11 – Polarisation sphérique $\tau_{ii}/3$ sous chargement sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ (gauche) et déviatorique τ_{12} sous chargement $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$ (droite) en fonction de la taille du voisinage r . Les courbes sont relatives à l'inclusion centrale (0) et les deux inclusions les plus proches (1) et (2).

qui se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon r au volume totale v_β de cette inclusion (fig. 2.12). La polarisation dans les inclusions centrales calculée sous cette hypothèse est d'autant plus juste que le rayon r est grand car le tenseur d'influence s'approche de son terme dominant ($\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) \approx v_\alpha v_\beta \mathbb{T}_0^\infty(\underline{R})$ quand $R \gg a_\alpha + a_\beta$) :

$$v'_\alpha \left((\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}_0)^{-1} + \mathbb{P}_\alpha \right) : \boldsymbol{\tau}_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v_\alpha v_\beta} \mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha) : \boldsymbol{\tau}_\beta = v'_\alpha \mathbf{E} \quad (2.19)$$

La figure 2.13 représente les polarisations dans les trois inclusions les plus proches du centre de l'amas de diamètre D . Les calculs (2.19) sont effectués avec prise en compte uniquement des calottes sphériques qui se trouvent à l'intérieur du rayon r pour les inclusions qui débordent de la sphère qui délimite le voisinage étudié. On remarque un lissage des courbes qui représentent les polarisations dans les inclusions centrales. Cela permet de voir plus clairement les asymptotes de ces courbes pour les grandes portées. Rien ne change cependant au niveau des points de départ et des tendances par rapport à la figure 2.11.

Remarque. On peut s'intéresser aux niveaux de contribution des termes d'influence (influence du voisinage) et des termes d'auto-influence (influence d'une inclusion sur elle-même) au calcul des polarisations. On sait que cette influence est faible quand les inclusions sont éloignées les unes des autres mais augmente avec la fraction volumique. Dans le présent exemple, on se propose d'approcher partout le tenseur d'influence par son terme dominant (approximation ponctuelle³). La

3. L'approximation ponctuelle désigne le remplacement du tenseur d'influence par son terme dominant

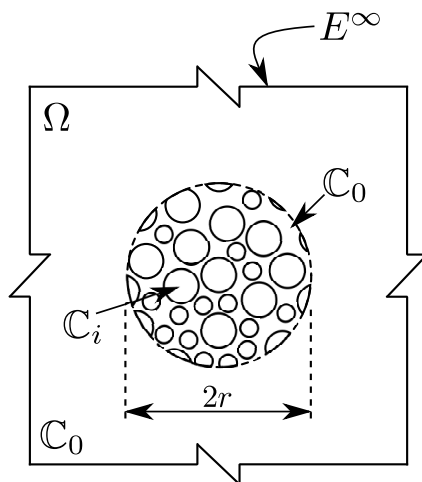


FIGURE 2.12 – Amas d'inclusions polydisperses plongées dans un milieu infini avec prise en comptes des calottes sphériques pour les inclusions qui débordent du rayon r du voisinage.

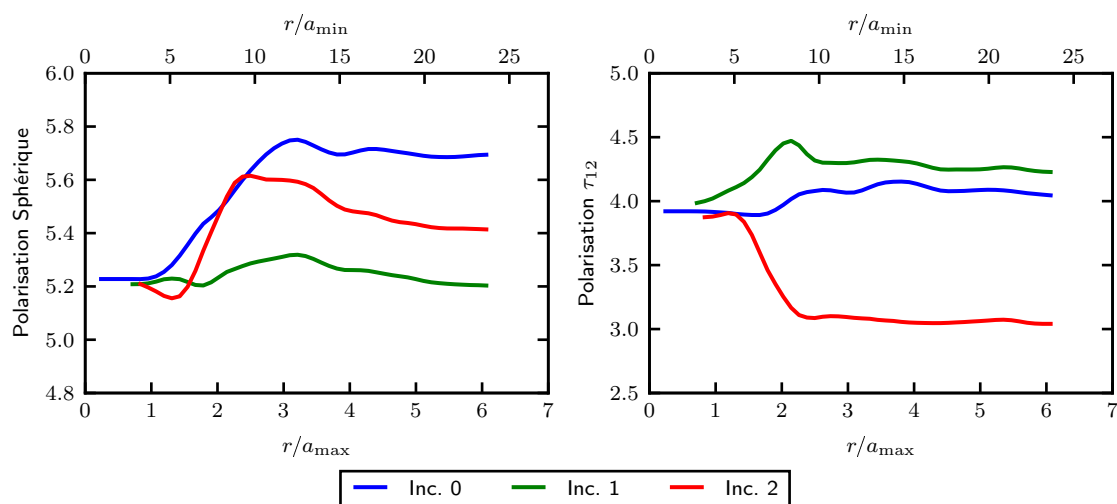


FIGURE 2.13 – Prise en comptes des calottes sphériques pour les inclusions qui débordent du rayon r du voisinage. Représentation des polarisations sphériques $\tau_{ii}/3$ sous chargement sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ (gauche) et déviatorique τ_{12} sous chargement $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$ (droite) en fonction de la taille du voisinage r . Les courbes sont relatives à l'inclusion centrale (0) et les deux inclusions les plus proches (1) et (2).

figure 2.14 présente une comparaison entre les résultats d'un calcul avec les tenseurs d'influence complets et avec l'approximation ponctuelle pour des sous-structures extraites de la microstructure *B11*. Les polarisations quand l'inclusion centrale est seule dans le milieu infini sont égales,

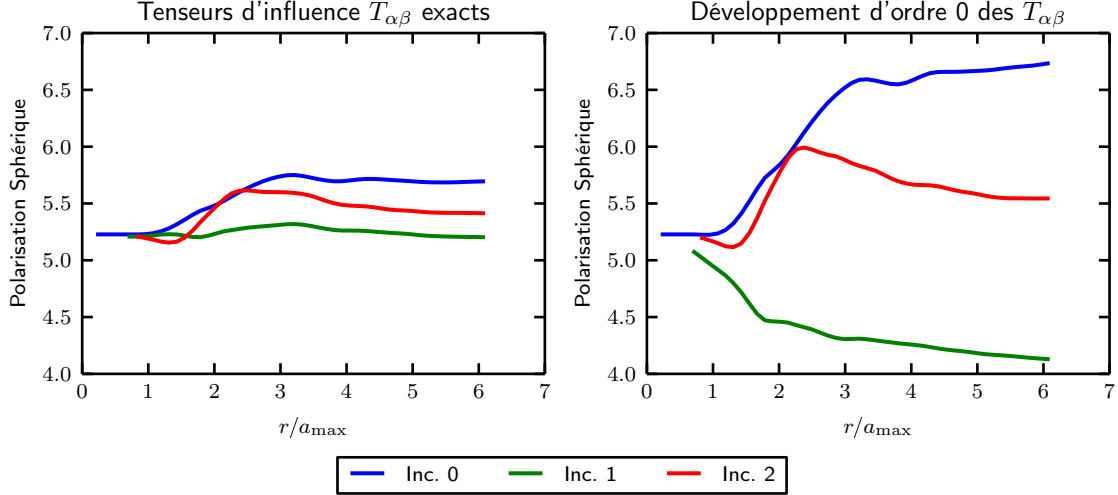


FIGURE 2.14 – Polarisation dans les trois inclusions centrales calculées avec des tenseurs d'influence exacts (gauche) et en remplaçant les tenseurs d'influence par leur terme dominant (droite).

mais le remplacement des tenseurs d'influence par l'approximation ponctuelle conduit à des résultats très écartés de ceux attendus. La contribution des tenseurs d'influence est ainsi loin d'être négligeable. Cette approximation aurait été bénéfique dans le cas des inclusions ellipsoïdales où l'obtention des tenseurs d'influence est difficile. La prise en compte des formes des inclusions est alors incontournable et les tenseurs d'influence doivent être calculés exactement pour les inclusions rapprochés.

2.5.3 Microstructure à inclusions ellipsoïdales

La méthode de l'inclusion équivalente est appliquée dans ce qui suit à une microstructure à inclusions ellipsoïdales de même géométrie (fig. 2.15). Cette microstructure, de bord sphérique, est extraite d'une microstructure cubique de 10000 inclusions de fraction volumique de 40% destinée à des calculs avec des conditions aux limites périodiques. Les inclusions dont le centre est à l'intérieur de ce domaine font partie de la microstructure étudiée.

Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu de référence sont respectivement $\mu_0 = 1$ et $\nu_0 = 0.2$, et pour les inclusions, $\nu_i = 0.2$ et $\mu_i = 100\mu_0$.

On s'intéresse à l'influence du voisinage d'inclusions placées au centre de l'amas étudié sur ces inclusions en vue de la quantification d'une portée d'interactions élastiques. Le problème suit

$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) \approx v_\alpha v_\beta \mathbb{T}_0^\infty(\underline{R})$. Dans ce cas, la forme des inclusions est négligée, les volumes sont concentrés aux centres et les inclusions se voient comme des points. Cette approximation a un sens quand la distance entre les inclusions est très grande par rapport à leurs rayons.



Fraction volumique $f = 40\%$
 Nombre d'inclusions $n = 394$
 Rayon du domaine $R = 5a = 1000$
 Rayons des inclusions : $\rho = \frac{c}{a} = \frac{1}{8}$

FIGURE 2.15 – Détails de la microstructure aux inclusions ellipsoïdales.

le même principe que l'exemple précédent (§ 2.5.2). On considère alors cet amas plongé dans un domaine infini pour ne pas tenir compte de l'effet du bord. Le système de la méthode de l'inclusion équivalente à résoudre est (2.17) où le terme correctif $\chi\bar{\tau}$ de Willis n'est pas pris en compte.

On s'intéresse à l'évolution de la polarisation dans les deux inclusions les plus proches du centre de l'amas en fonction de la taille r du voisinage. Comme le montre la figure 2.16, le voisinage est une sous-structure de l'amas de départ de taille D , définie par toutes les inclusions dont le centre se trouve à une distance inférieure ou égale à r du centre de l'amas.

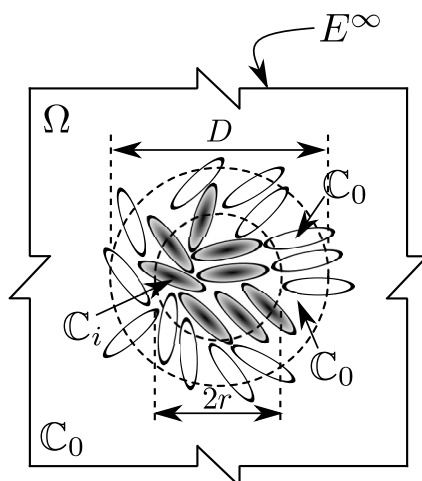


FIGURE 2.16 – Amas d'inclusions ellipsoïdales plongées dans un milieu infini et modalité de choix des inclusions du voisinage étudié.

La figure 2.17 représente les résultats de calcul pour une distance de transition $r_0 = 4a$. Cette distance est suggérée par les résultats de l'étude exhaustive effectuée précédemment (§ 2.4.4). Pareillement au cas des sphères et des disques, on vérifie que le point de départ des courbe quand

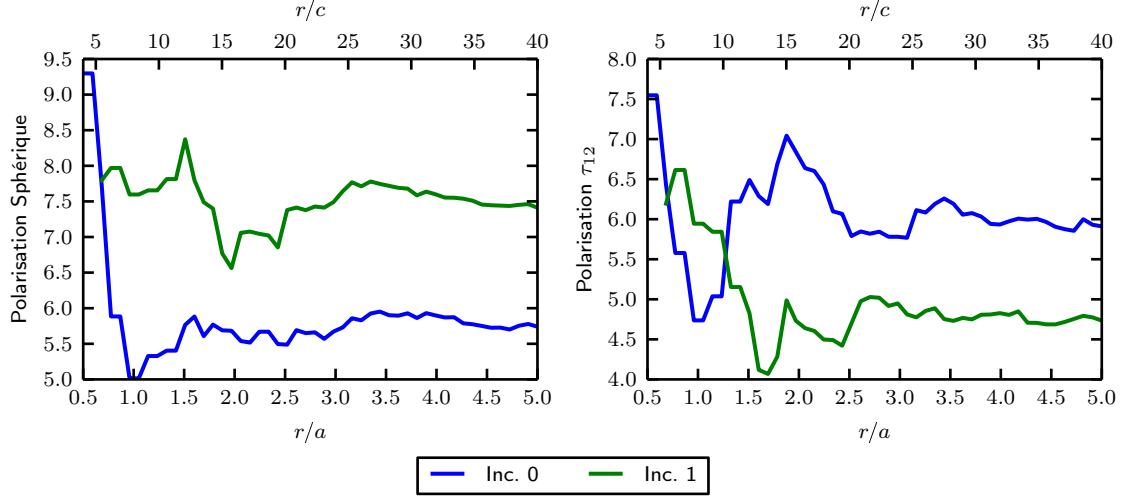


FIGURE 2.17 – Polarisation sphériques $\tau_{ii}/3$ sous chargement sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ (gauche) et déviatorique τ_{12} sous chargement $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$ (droite) en fonction de la taille du voisinage r . Les courbes sont relatives aux deux inclusions (0) et (1) les plus proches du centre de l'amas. Les chargement et les résultats sont définis dans le repère global. La distance de transition est : $r_0 = 4a$.

l'inclusion est toute seule dans le milieu infini correspond à la solution du problème d'Eshelby. La polarisation évolue brusquement par la suite, traduisant ainsi la forte influence de voisinage proche, pour atteindre une asymptote horizontale (parallèle à la courbe du schéma dilué) qui signal la faible influence du voisinage éloigné. La portée des interactions élastiques rapportée au plus grand rayon des hétérogénéités est dans ce cas du même ordre que la portée trouvée dans le cas des sphères polydisperses. Cependant, l'effet du voisinage sur la polarisation –mesuré par l'écart relatif entre la valeur asymptotique de la polarisation et la valeur obtenue dans le cas d'une inclusion isolée (solution d'Eshelby)– est plus important dans le cas d'ellipsoïdes aplatis que dans le cas de sphères.

Le calcul est ensuite effectué pour des distances de transition plus réduites ($r_0 = 3a$ et $r_0 = 2a$), permettant ainsi de réduire le nombre des calculs par intégration numérique double⁴. Les courbes de la figure 2.18 représentent, en terme d'écart relatif, la différence entre les résultats précédents (fig. 2.17) et ceux obtenus avec des distances de transition réduites. On remarque sur toutes les courbes que pour un voisinage court, il n'y a aucun écart. Cette taille de voisinage où l'écart est nul correspond à la zone où tous les tenseurs sont calculés par intégration numérique. Cela est vrai quand le diamètre du voisinage est inférieur à la distance de transition $r_0 > 2r$. Au delà de cette zone, on commence à observer un écart qui traduit l'effet de cette distance de transition. Avec une distance de transition réduite à $r_0 = 3a$, on observe un écart relatif inférieur à 1%, qui est l'erreur relative moyenne maximale assurée par l'étude précédente de la distance

4. Voir fig. 3.32 au chapitre suivant, illustrant le gain en temps de calcul après réduction de la distance de transition.

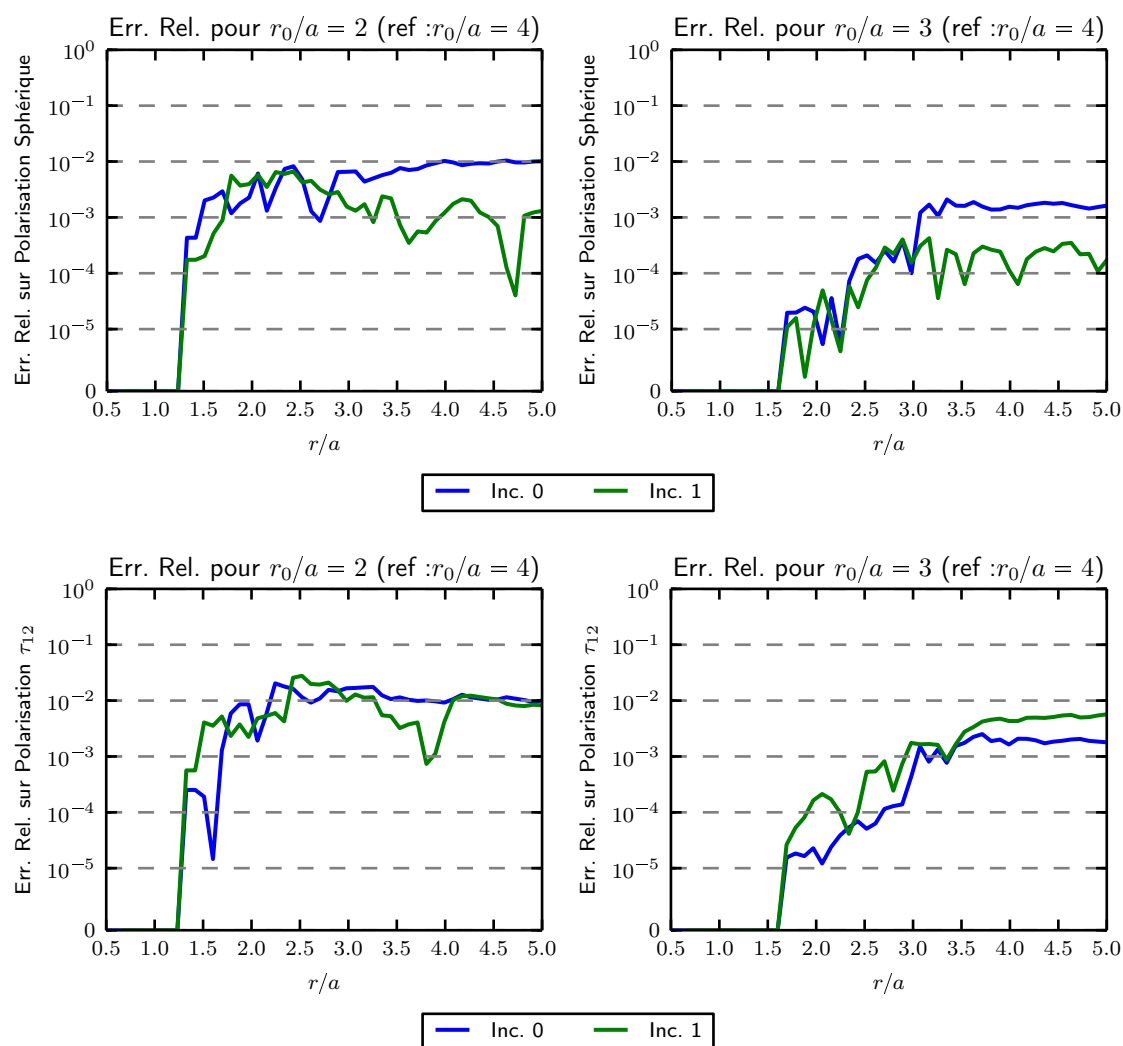


FIGURE 2.18 – Écart relatif entre la polarisation calculée avec une distance de transition $r_0 = 4a$ et celles calculées avec des distances de transition réduites, $r_0 = 2a$ (gauche) et $r_0 = 3a$ (droite). Les courbes comparées sont celles de la polarisation sphérique sous chargement sphérique $\mathbf{E} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ (haut) et la polarisation déviatorique τ_{12} sous chargement déviatorique $\mathbf{E} = \underline{e}_1 \otimes^s \underline{e}_2$ (bas).

de transition (§ 2.4.4). Cela signifie que le calcul global reste acceptable quand on réduit le nombre de tenseurs calculés par intégration numérique même si la précision de certains tenseurs est dégradée. [La réduction de cette distance en deçà affiche des écarts relatifs importants qu'on ne peut pas se permettre d'accepter.] La figure 2.18 montre par ailleurs qu'en deçà de $2a$, la distance de transition conduit à des erreurs relatives inacceptables.

Ainsi, la première étude de la distance de transition (§ 2.4.4) nous a donné une indication sur la frontière optimale pour la discrétisation du domaine d'intégration numérique considéré. Le déplacement de cette frontière en faveur de l'approximation par développement limité n'a pas introduit des écarts importants, ce qui prouve que la dégradation de la précision de quelques tenseurs d'influence n'affecte pas significativement la précision du calcul.

L'extension de la méthode de l'inclusion équivalente à des inclusions ellipsoïdales est possible, mais le calcul des tenseurs d'influence est plus complexe que dans le cas des inclusions sphériques. Deux méthodes sont utilisées pour calculer les tenseurs d'influence :

- la méthode de Berveiller *et al.*, qui remplace la double intégrale de volume (2.1) par une intégration sur une sphère (dans l'espace de Fourier) qui peut être calculée numériquement. Cette méthode est précise quand les inclusions sont rapprochées (où le support de l'intégrande est grand),
- le développement limité d'ordre 2 qui approxime les tenseurs d'influence quand les inclusions sont assez éloignées pour que leurs formes géométriques n'aient que peu d'effet sur la valeur de ces tenseurs.

Du point de vue du temps de calcul, l'intégration numérique est plus coûteuse que l'approximation par développement limité.

Chacune de ces méthodes a un domaine de validité, paramétré par la distance entre les inclusions, où la précision est acceptable. La distance de transition est un critère géométrique qu'on a utilisé dans les précédents exemples pour quantifier la frontière à partir de laquelle les inclusions peuvent être considérées rapprochées ou éloignées. Cette distance est évaluée en pratique par le point d'intersection de la courbe de l'erreur relative sur les tenseurs d'influence calculés par intégration numérique (croissante avec la distance entre inclusions) et par développement limité d'ordre 2 (décroissante avec la distance entre inclusions).

La précision des tenseurs d'influence est minimale autour de la distance de transition, ce qui représente un nombre limité de tenseurs sur l'échelle d'un calcul complet. La majorité des tenseurs d'influence sont calculés avec une meilleure précision. De ce fait, sur un calcul complet, la réduction de la distance de transition en faveur de l'approximation par développement limité ne dégrade pas les résultats.

Chapitre 3

Application en viscoélasticité linéaire non-vieillissante

Les matériaux cimentaires ont un comportement très complexe dans le temps, influencé par un nombre important de paramètres internes et externes. L'étude de ce comportement est très importante pour les structures précontraintes des centrales nucléaires, non seulement pour l'aspect structural, mais également pour assurer une partie de l'étanchéité des parois d'une enceinte.

Le comportement de ces matériaux est caractérisé de deux manières différentes au moins, selon l'âge du béton :

- comportement au jeune âge : où les réactions d'hydratation ne sont pas encore terminées et le béton n'a pas atteint son module d'Young nominal. L'aspect chimique est prédominant dans cette phase.
- comportement à long terme : quand les réactions chimiques peuvent être considérées finies, le matériau cimentaire devient plus influençable par l'environnement (température, humidité relative), l'aspect mécanique (macroscopique et microscopique) et microstructural (réseau des pores et fissures).

Les méthodes présentées dans le présent travail traitent ces matériaux d'un point de vue mécanique et visent à établir les relations entre le comportement à long terme au niveau de la microstructure et le comportement à long terme macroscopique (fluage).

La notion de fluage est elle même très complexe. En petites déformations, plusieurs processus contribuent à la modification dans le temps de ε . Ce dernier peut être décomposé comme suit (Granger, 1995) :

$$\varepsilon = \underbrace{\varepsilon^e}_{\text{déformation élastique}} + \underbrace{\varepsilon^{f.p}}_{\text{fluage propre}} + \underbrace{\varepsilon^{f.d}}_{\text{fluage de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{r.e}}_{\text{retrait endogène}} + \underbrace{\varepsilon^{r.d}}_{\text{retrait de dessiccation}} + \underbrace{\varepsilon^{th}}_{\text{déformation thermique}} \quad (3.1)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la contribution du fluage propre. La déformation étudiée est :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{f.p} \quad (3.2)$$

On suppose dans tout ce chapitre une relation linéaire entre l'humidité relative et la déformation de fluage :

$$\varepsilon^{\text{f.p}} = h \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.3)$$

où h désigne l'humidité relative interne.

Remarque. Pour les problèmes d'homogénéisation, l'humidité relative est toujours considérée uniforme dans le VES.

Le comportement à long terme peut lui aussi être caractérisé en deux phases : dans la première, le module d'Young est variable dans le temps. L'effet du vieillissement ne peut être négligé dans ce cas. À la seconde phase (à partir de 12 à 24 mois après la prise), l'effet de l'âge est moins important. Les chargements appliqués pendant cette phase peuvent être considérés sans tenir compte du vieillissement. Nous nous mettons dans ce qui suit dans l'hypothèse d'un comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement. Cette hypothèse a l'avantage de permettre l'utilisation de toutes les méthodes d'homogénéisation établies dans le cadre de l'élasticité linéaire sans avoir besoin de faire des calculs non linéaires.

Nous nous intéressons en particulier à l'extension de la méthode de l'inclusion équivalente (chap. 1) aux comportements viscoélastiques linéaires sans vieillissement. Cette dernière permet de déterminer une estimation des champs mécaniques moyens dans chaque inclusion. Nous présentons dans ce qui suit une méthodologie d'utilisation de la méthode de l'inclusion équivalente dans le cadre de la viscoélasticité linéaire sans vieillissement, en exploitant et améliorant des techniques afin de réduire au mieux la quantité des calculs nécessaires à l'estimation du fluage des matériaux composites de type matrice-inclusions.

3.1 Homogénéisation en viscoélasticité linéaire

L'homogénéisation permet d'estimer le comportement d'un matériau à partir des caractéristiques de sa microstructure. Dans le cas où tous les constituants ont un comportement élastique linéaire, le comportement du matériau composite qu'ils constituent l'est également. La littérature contient de nombreuses méthodes et techniques développées pour l'homogénéisation de ce type de matériau. Lorsque les constituants ont un comportement viscoélastique linéaire non vieillissant, le matériau homogénéisé a également un comportement viscoélastique linéaire non vieillissant.

Avec l'hypothèse du non vieillissement, il est courant d'utiliser la transformée de Laplace–Carson. Celle-ci permet de transformer un problème d'évolution viscoélastique linéaire non-vieillissant en une série de problèmes élastiques linéaires. Toutes les techniques d'homogénéisation connues pour les problèmes élastiques linéaires peuvent alors être appliquées dans l'espace de Laplace–Carson à un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant.

Une fois le problème résolu dans l'espace de Laplace–Carson, il reste à ramener les résultats dans le domaine temporel par inversion de la transformée. Cependant, il est rare de savoir inverser analytiquement cette transformée. On a souvent recours à des techniques numériques.

3.1.1 Problème d'homogénéisation en viscoélasticité linéaire sans vieillissement

3.1.1.1 Comportement viscoélastique linéaire non vieillissant

Dans une expérience élémentaire de fluage, on sollicite le matériau par un échelon de contrainte σ_0 à l'instant t' et on observe l'évolution de la déformation ε en fonction du temps t . Lorsque le comportement du matériau est viscoélastique linéaire, non vieillissant, la relation entre σ_0 et ε s'écrit :

$$\varepsilon(t) = \mathbb{J}(t - t') : \sigma_0 \quad (3.4)$$

où \mathbb{J} désigne la complaisance de fluage (ou de retard). On convient que $\mathbb{J}(t) = 0$ pour $t < 0$.

En considérant un historique de sollicitation quelconque $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\sigma}{dt'} dt' \quad (3.5)$$

du fait de la linéarité du comportement, on a :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \mathbb{J}(t - t') : \frac{d\sigma}{dt'}(t') dt' \quad (3.6)$$

Remarque. L'expression (3.5) est une intégrale de Stieltjes. Elle s'entend au sens des distributions.

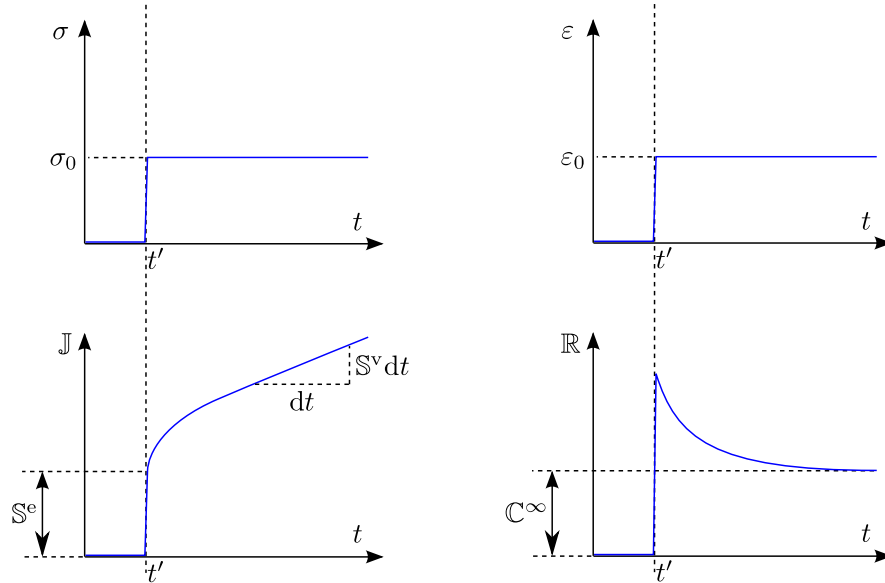


FIGURE 3.1 – Schéma représentant la forme générale des fonctions de fluage (3.7) (gauche) et de relaxation (3.8) (droite).

En se basant sur la thermodynamique des processus irréversibles, il est possible de donner une écriture générale de la fonction de relaxation et la complaisance de fluage (Biot, 1954) :

$$\mathbb{J}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{J}^s(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau + \mathbb{S}^e + t\mathbb{S}^v \quad (3.7)$$

$$\mathbb{R}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{R}^s(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau + \mathbb{C}^\infty + \mathbb{H}\delta(t) \quad (3.8)$$

où, \mathbb{S}^e et \mathbb{S}^v sont respectivement les tenseurs des complaisances élastique et visqueuse (caractérisant le comportement instantané et asymptotique du matériau), \mathbb{C}^∞ est la rigidité asymptotique, $\mathbb{J}^s(\tau)$ est le spectre de fluage et $\mathbb{R}^s(\tau)$ est le spectre de relaxation du matériau. Lorsque \mathbb{H} est non-nul, le matériau n'a pas d'élasticité instantanée. Les spectres $\mathbb{J}^s(\tau)$ et $\mathbb{R}^s(\tau)$ sont définis au sens des distributions.

Le théorème aux limites permet de donner la relation entre la fonction de relaxation et la complaisance de fluage à court et long terme (Salençon, 2009) :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{J}(t) : \mathbb{R}(t) = \mathbb{I} \quad (3.9a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{J}(t) : \mathbb{R}(t) = \mathbb{I} \quad (3.9b)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité d'ordre 4.

3.1.1.2 Problème d'homogénéisation

Un problème d'homogénéisation en viscoélasticité linéaire non vieillissante est posé comme suit :

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t)) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.10a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) = (\mathbb{R} * \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.10b)$$

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = \boldsymbol{E}(t) \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (3.10c)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi})(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.10d)$$

La déformation macroscopique est notée $\boldsymbol{E}(t)$ et les conditions aux limites (3.10c) permettent d'assurer que $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{E}(t)$.

Quand les constituants d'un matériau composite ont un comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant, le comportement macroscopique est lui aussi viscoélastique linéaire non vieillissant. Nous verrons au paragraphe suivant que la relation entre la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}(t) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ et la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}(t)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = (\mathbb{R}_{\text{hom}} * \dot{\boldsymbol{E}})(t) \quad (3.11)$$

En d'autres termes, le matériau homogénéisé a un comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant.

3.1.2 Utilisation du principe de correspondance

La transformée de Laplace de la fonction f , notée \mathcal{L}_f , est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \quad (3.12)$$

p étant la variable de Laplace. Elle est complexe de dimension $[T^{-1}]$.

La transformée de Laplace–Carson est notée f^\star et définie de la manière suivante :

$$f^\star(p) = p\mathcal{L}_f(p) \quad (3.13)$$

Cette transformée est linéaire et permet de remplacer le produit de convolution par un produit algébrique dans l'espace de Laplace. Le problème d'homogénéisation en viscoélasticité linéaire sans vieillissement (3.10) s'écrit dans l'espace de Laplace–Carson comme suit :

$$\underline{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}^\star(\underline{x}, p)) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.14a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\star(\underline{x}, p) = \mathbb{R}^\star(\underline{x}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}^\star(\underline{x}, p) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.14b)$$

$$\underline{\xi}^\star(\underline{x}, p) = \mathbf{E}^\star(p) \cdot \underline{x} \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (3.14c)$$

$$\underline{\varepsilon}^\star(\underline{x}, p) = \mathbf{grad}^s(\underline{\xi}^\star)(\underline{x}, p) \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3.14d)$$

Le problème (3.14) correspond à un problème d'élasticité linéaire hétérogène (raideur locale : $\mathbb{R}^\star(\underline{x}, p)$), indexé par la variable de Laplace p . Ainsi, le problème d'évolution viscoélastique linéaire non-vieillissant est équivalent à une infinité de problèmes élastiques linéaires dans l'espace de Laplace–Carson (Mandel, 1966).

Pour chaque valeur de p , la solution du problème (3.14) dépend linéairement du paramètre de chargement $\mathbf{E}^\star(p)$. En particulier, on a :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}(p) = \mathbb{R}_{\text{hom}}(p) : \mathbf{E}(p) \quad (3.15)$$

Par inversion de Laplace, on retrouve bien l'équation (3.11), qui montre que le milieu homogénéisé a un comportement de type viscoélastique linéaire non-vieillissant.

Pour une valeur de p fixée, toutes les techniques d'homogénéisation connues pour l'élasticité linéaire peuvent être appliquées pour déterminer $\mathbb{R}_{\text{hom}}^\star(p)$. La fonction de relaxation $\mathbb{R}_{\text{hom}}(t)$ est déterminée par inversion de la transformée de Laplace–Carson.

Une fonction et sa transformée de Laplace–Carson ont la même dimension, ce qui n'est pas le cas de la transformée de Laplace. Le théorème aux limites qui a permis de déduire le résultat (3.9) donne la relation entre une fonction et sa transformée de Laplace–Carson quand t et p tendent vers 0 ou l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} f^\star(p) \quad (3.16a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} f^\star(p) \quad (3.16b)$$

3.1.3 Le modèle de Burgers pour la matrice cimentaire

Afin de modéliser le comportement en fluage propre du béton (que l'on considère viscoélastique linéaire non vieillissant), on considère souvent que les granulats sont de comportement élastique linéaire et que le fluage provient de la matrice cimentaire. Ainsi, un modèle rhéologique de viscoélasticité linéaire sans vieillissement est affecté à la matrice. Cette hypothèse n'est pas une limite à la méthode de l'inclusion équivalente ; rien n'empêche de considérer des grains viscoélastiques.

Les modèles rhéologiques élémentaires en viscoélasticité sont les montages en série (Maxwell) et en parallèle (Kelvin) d'un ressort et d'un pot visqueux (qu'on peut appeler également amortisseur). Le ressort seul correspond à un comportement élastique linéaire et l'amortisseur à un comportement visqueux pur, où la contrainte est en relation linéaire avec le taux de déformation.



FIGURE 3.2 – Schémas élémentaires de Maxwell (gauche) et Kelvin (droite).

La déformation imposée à un matériau de Maxwell dans une expérience de relaxation est instantanément supportée par le ressort. Elle passe à l'amortisseur avec le temps à une vitesse qui dépend de sa viscosité et de la rigidité du ressort jusqu'à ce que ce dernier ne soit plus déformé (à l'infini). La contrainte s'annule à la fin de l'expérience. Il n'est pas possible d'appliquer une déformation instantanée au modèle de Kelvin, ce qui le rend inadapté à une expérience de relaxation.

Dans une expérience de fluage, le matériau de Maxwell se déforme instantanément par le biais du ressort. La déformation continue à augmenter linéairement en fonction du temps à une vitesse qui dépend de la viscosité de l'amortisseur. Le matériau de Kelvin, sous une contrainte imposée, ne se déforme pas instantanément. La déformation croît par la suite et tend vers la déformation du ressort seul placé sous la même contrainte.

On constate que le matériau de Maxwell se déforme linéairement avec le temps jusqu'à l'infini dans une expérience de fluage, que la contrainte s'annule en relaxation et que le matériau de Kelvin n'a pas de réponse instantanée. Pour ces trois raisons, les deux modèles sont trop basiques pour pouvoir représenter un matériau réel tel que le béton qui a une déformation élastique limitée, une réponse instantanée et dont la contrainte ne s'annule pas dans une expérience de relaxation. Ces modèles peuvent néanmoins donner des résultats satisfaisants s'ils sont utilisés sur des intervalles de temps «raisonnables».

Il est à noter que le matériau de Kelvin se déforme d'une manière réversible (recouvrance complète (Salençon, 2009)) alors que le matériau de Maxwell a une déformation irréversible (recouvrance partielle). La déformation irréversible est stockée dans le pot visqueux.

Le modèle rhéologique de Burgers est obtenu par la mise en série d'un modèle de Maxwell et un modèle de Kelvin. Le ressort élastique de la partie de Maxwell correspond à une réponse instantanée, le pot visqueux à une réponse différée irréversible et la partie de Kelvin à une réponse différée réversible. Ce modèle peut s'appliquer d'une façon découplée aux composantes sphérique et déviatorique du comportement (fig. 3.3).

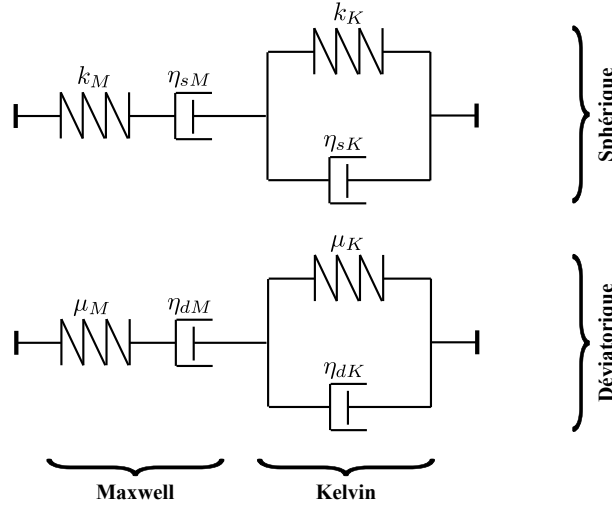


FIGURE 3.3 – Schéma de Burgers d'un comportement mécanique.

Les modules des différentes composantes du modèle sont les suivants :

	Ressort Maxwell	Pot Maxwell	Ressort Kelvin	Pot Kelvin
Sphérique	k_M	η_{sM}	k_K	η_{sK}
Déviatorique	μ_M	η_{dM}	μ_K	η_{dK}

TABLE 3.1 – Modules d'un matériau de Burgers

Les tenseurs de comportement relatifs aux ressorts et aux pots visqueux de ce modèle s'écrivent :

$$\mathbb{C}_K = 3k_K \mathbb{J} + 2\mu_K \mathbb{K} \quad (3.17a)$$

$$\mathbb{C}_M = 3k_M \mathbb{J} + 2\mu_M \mathbb{K} \quad (3.17b)$$

$$\mathbb{H}_K = 3\eta_{sK} \mathbb{J} + 2\eta_{dK} \mathbb{K} \quad (3.17c)$$

$$\mathbb{H}_M = 3\eta_{sM} \mathbb{J} + 2\eta_{dM} \mathbb{K} \quad (3.17d)$$

où \mathbb{C}_K et \mathbb{H}_K représentent respectivement les comportements élastique et purement visqueux de la partie de Kelvin et \mathbb{C}_M et \mathbb{H}_M représentent les comportements élastique et purement visqueux de la partie de Maxwell.

Le modèle de Burgers améliore le modèle de Kelvin en permettant une déformation instantanée. Cependant, le problème de la déformation non limitée en fluage et la décroissance non limitée de la contrainte en déformation du modèle de Maxwell sont présents également dans le modèle de Burgers, ce qui empêche son utilisation sur des durées très longues. La valeur ajoutée du modèle de Burgers par rapport au modèle de Maxwell est que le modèle de Burgers, à peine un peu plus complexe que les modèles élémentaires, peut être mieux calé à des résultats d'expériences et ainsi, mieux représenter un matériau réel.

Sur des durées très longues, on peut remarquer un écart entre le modèle de Burgers et le comportement observé expérimentalement. Cet écart peut être corrigé en utilisant un modèle viscoélastique linéaire plus complexe (série de Kelvin (Granger, 1995)) ou en introduisant des non-linéarités (Sellier et Buffo-Lacarrière, 2009) ou du vieillissement (Masson *et al.*, 2012; Ricaud et Masson, 2009; Sanahuja, 2013). Ces modèles enrichis ne peuvent néanmoins plus être traités par la transformée de Laplace–Carson.

3.2 Inversion de la transformée de Laplace–Carson - État de l'art

Parmi les difficultés de l'application du principe de correspondance, c'est que la formule générale d'inversion de la transformée de Laplace–Carson (formule de Bromwich) n'est pas simple à appliquer¹. Pour la plupart des problèmes, on fait appel à des techniques numériques d'approximation.

On trouve dans la littérature une multitude de méthodes qui permettent l'inversion numérique de la transformée de Laplace. Nous pouvons catégoriser la majorité de ces méthodes en deux familles :

- des algorithmes d'inversion généraux, approchant l'inverse sous forme d'une combinaison linéaire de termes dépendant de la valeur de la transformée en certains points du domaine de Laplace. Ces méthodes sont décrites d'une manière générale dans un article d'Abate (2006). Les coefficients de pondération peuvent être dépendants de la transformée de Laplace (comme dans le cas de la méthode de Laguerre (Abate *et al.*, 1998)) ou uniquement du nombre de termes dans la somme (comme la méthode de Gaver (Valkó et Abate, 2004) qu'on verra de plus près). Certaines de ces méthodes peuvent également être exprimées par une relation de récurrence (Nous citons à ce titre les fonctionnelles de Gaver munies de certains accélérateurs de convergence (Valkó et Abate, 2004)),
- des méthodes spécifiques aux problèmes de la viscoélasticité, qui proposent une forme à l'inverse (en tenant compte de certaines considérations physiques) et l'optimisent en

1. La formule de Bromwich opère dans le plan complexe et nécessite la connaissance de l'expression analytique de la transformée. L'exploitation de cette formule est possible dans certains cas limités (comme dans les travaux de Beurthey et Zaoui (2000) pour déterminer le spectre de relaxation en cisaillement d'un biphasé de Maxwell incompressible, § 3.3.1.3).

s'appuyant sur la connaissance des valeurs de la transformée en certains points de l'espace de Laplace–Carson.

La méthode de l'inclusion équivalente peut être appliquée en certains points p de l'espace de Laplace–Carson. De ce fait, elle n'est adaptée que pour certaines méthodes d'inversion qui nécessitent de faire des calculs discrets dans cet espace.

Il y a par ailleurs d'autres méthodes intéressantes mais qui ne sont pas adaptées à notre problématique, comme celle de Donolato (2002) qui nécessite la connaissance de la transformée ainsi que ses dérivées².

Dans ce qui suit, nous allons nous focaliser sur des méthodes que nous avons jugées pratiques pour nos applications :

- l'algorithme de Stehfest (Stehfest, 1970a,b) basé sur la méthode de Gaver (Valkó et Abate, 2004),
- la méthode de collocation de Schapery (1962) qui propose une approximation de la fonction inversée à caler dans l'espace de Laplace–Carson.

Les deux méthodes ne nécessitent que des évaluations de la transformée en des points discrets de l'espace de Laplace–Carson. Nous accordons en fait une grande importance au nombre de calculs à effectuer dans cet espace car l'évaluation de la transformée en chaque point correspond à un calcul complet avec la méthode de l'inclusion équivalente. Il est ainsi dans notre intérêt de minimiser au maximum le nombre de points d'évaluation. L'algorithme de Stehfest donne des résultats satisfaisants, mais, comme on le verra plus tard (§ 3.2.1), nécessite un nombre important de calculs dans l'espace de Laplace–Carson. La méthode de collocation donne aussi des résultats satisfaisants avec en général moins d'évaluations dans cet espace, mais elle contient un nombre important de paramètres que l'utilisateur doit définir pour obtenir une bonne inversion. Nous introduisons cette méthode dans ce qui suit (§ 3.2.2.1) et mentionnons les principaux travaux qui ont conduit à l'amélioration de sa précision et la simplification de son utilisation.

Nous terminons cette partie par rappeler la méthode directe, plus ancienne que les techniques pré-citées, mais dont le principe permet de justifier la relation entre la variable de Laplace et la variable temporelle.

3.2.1 Méthode de Stehfest

Parmi les méthodes les plus efficaces pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace, il y a celles basées sur les fonctionnelles de Gaver, définies par :

$$f_k(t) = k \frac{\ln 2}{t} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \mathcal{L}_f \left((k+j) \frac{\ln 2}{t} \right) \quad (3.18)$$

où l'on rappelle l'expression du coefficient binomial $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$. Comme le rappellent Valkó et Abate (2004), la série des fonctionnelles de Gaver converge d'une manière logarithmique vers

2. Cette méthode a constitué par exemple une référence de comparaison pour des méthodes d'approximation de la fonction de fluage d'un schéma auto-cohérent généralisé (Hoang-Duc *et al.*, 2013), pour laquelle il est plus aisé de calculer les dérivées.

l'inverse. L'algorithme de Stehfest rend cette convergence linéaire en combinant ces fonctionnelles avec des accélérateurs de convergence.

Stehfest propose l'approximation suivante à l'inverse de la transformée de Laplace :

$$f(t) \simeq f_{\text{steh}}(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^n w_i \mathcal{L}_f \left(\frac{\ln 2}{t} i \right) \quad (3.19)$$

où les poids w_i sont définis de la manière suivante :

$$w_i = (-1)^{\frac{n}{2}+i} \sum_{k=\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{\min(i, \frac{n}{2})} \frac{k^{\frac{n}{2}} (2k)!}{(\frac{n}{2} - k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \quad (3.20)$$

La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Dans la formulation (3.19), c'est la transformée de Laplace qui est inversée. L'adaptation à la transformée de Laplace–Carson nécessite de diviser par $p = \frac{\ln 2}{t} i$ la transformée de Laplace dans l'expression (3.19).

n et w_i seront appelés respectivement paramètre et poids de Stehfest. Le paramètre n est un nombre entier pair. Il correspond au nombre de poids à calculer et au nombre d'évaluations à réaliser dans l'espace de Laplace. Il intervient également dans l'expression des poids. Il peut être choisi par l'utilisateur, mais en tenant compte de certaines limitations ; théoriquement, plus le nombre n est grand, plus précise est l'approximation. Mais en réalité, la précision du calculateur ne permet pas de prendre ce paramètre aussi grand que l'on veut. L'expérience montre que ce paramètre a une valeur optimale dépendant de la précision des nombres flottants. Pour des calculs en double précision, $n = 14$ convient bien et des instabilités numériques apparaissent quand n dépasse 18.

Les poids de Stehfest w_i s'écrivent sous forme de sommes dépendant du paramètre de Stehfest choisi mais pas du point où l'on cherche à estimer l'inverse. Ceci est l'un des avantages de cette méthode. Cela signifie qu'après avoir fixé n , les poids w_i , une fois calculés, peuvent être stockés et utilisés pour l'inversion de plusieurs fonctions.

On note que les termes de la somme (3.19) sont de signes alternés. Afin de ne pas cumuler les erreurs de troncature, il est nécessaire de la calculer avec la meilleure précision possible. Par exemple, on peut :

- sommer les termes positifs d'un côté et les négatifs de l'autre, en commençant par ceux de la plus petite valeur absolue,
- ou bien appliquer des techniques plus générales de réduction de l'erreur de virgule flottante telles que l'algorithme de Kahan (1965).

Une attention doit être accordée également au calcul des poids w_i : par exemple, calculer le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle avec des entiers longs³ afin de n'exécuter qu'une seule division flottante.

3. possible dans le langage Python utilisé pour cette implémentation.

L'inversion par cet algorithme est précise (erreur relative de l'ordre de 10^{-5} en double précision). Mais cette précision peut être affectée pour les fonctions oscillantes (fonctions à bruit ou provenant de l'expérimentation). On note également une des limites de la méthode; du fait de l'expression de la somme de Stehfest, l'estimation de l'inverse en m points nécessite de faire $n \times m$ évaluations dans l'espace de Laplace. Cela commence à poser problème lorsque le calcul dans l'espace de Laplace est coûteux, ce qui est le cas de la méthode de l'inclusion équivalente.

Cette méthode trouve son intérêt par la suite afin d'établir des références lorsque l'expression analytique de la transformée de Laplace-Carson n'est pas connue. Elle est également pratique lorsqu'on cherche à déterminer le comportement en un petit nombre de points.

3.2.2 Inversion par collocation

La méthode de collocation, formulée initialement par Schapery (1962), a été introduite pour la résolution des problèmes de viscoélasticité linéaire non vieillissante. Cette méthode est adaptée pour l'approximation de la partie transitoire d'un comportement viscoélastique.

Cette méthode propose une approximation de la fonction à chercher sous forme d'une somme d'exponentielles décroissantes :

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^N f_i e^{-\frac{t}{\theta_i}} \quad (3.21)$$

Dans cette expression, les f_i sont des coefficients que la méthode propose de déterminer et les θ_i sont des temps caractéristiques fixés a priori. On note θ_i les temps caractéristiques de l'approximation afin de les distinguer des temps caractéristiques (lorsqu'ils existent) τ_i .

Remarque. L'approximation sous forme d'une somme d'exponentielles vient du fait qu'un comportement viscoélastique linéaire peut être représenté par une série de Prony (Biot, 1954). En effet, comme le montrent les équations (3.7) et (3.8), les spectres de fluage et de relaxation peuvent être approchés par une somme discrète d'exponentielles décroissantes :

$$\mathbb{J}(t) - \mathbb{S}^e - t\mathbb{S}^v = \int_0^{+\infty} \mathbb{J}^s(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \approx \sum_{i=1}^N \mathbb{J}_i^s \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}}\right) \quad (3.22)$$

$$\mathbb{R}(t) - \mathbb{C}^\infty - \mathbb{H}\delta(t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{R}^s(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \approx \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_i^s e^{-\frac{t}{\theta_i}} \quad (3.23)$$

Rigoureusement pour le fluage, la partie constante $\int_0^{+\infty} \mathbb{J}^s(\tau) d\tau$ de la composante transitoire doit également être isolée afin d'appliquer l'approximation de la méthode de collocation.

Les coefficients f_i sont obtenus par résolution d'un certain problème d'optimisation visant à minimiser une erreur χ^2 dont l'expression peut changer d'une méthode à une autre. On rappelle la transformée de Laplace-Carson d'une exponentielle décroissante :

$$g(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} \implies g^*(p) = \frac{p\theta}{1 + p\theta} \quad (3.24)$$

3.2.2.1 Méthode de Schapery

Dans la version classique de la méthode, Schapery (1962) propose de minimiser l'erreur suivante :

$$\chi^2 = \int_0^{+\infty} \left[\hat{f}(t) - f(t) \right]^2 dt \quad (3.25)$$

On trouve que cette erreur est minimale quand :

$$\hat{f}^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) = f^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) \quad (3.26)$$

pour $i = 1, 2, \dots, N$. Cette équation se ramène alors au système :

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (3.27)$$

où $b_i = f^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right)$, $A_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{\theta_i}{\theta_j}}$ et $x_j = f_j$. Les f_i sont obtenus par une simple inversion du système linéaire (donc de la matrice \mathbf{A}).

3.2.2.2 Méthode de Lévesque

Dans la même ligne de pensée, Lévesque *et al.* (2007) proposent de définir l'erreur dans le domaine de Laplace–Carson. La minimisation est réalisée par une régression par moindres carrés de l'approximation $\hat{f}^*(p)$ sur les valeurs connues $f^*(p_s)$ de la transformée à inverser. Comme l'indiquent les auteurs, leur travail trouve son origine dans la démarche de Cost et Becker (1970) avec leur méthode multi-données. L'erreur à minimiser est définie comme suit :

$$\chi^2 = \sum_{s=1}^m \left[\hat{f}^*(p_s) - f^*(p_s) \right]^2 \quad (3.28)$$

où les p_s sont les points de régression et m le nombre de mesures dans l'espace de Laplace–Carson. Le système à résoudre devient :

$${}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = {}^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \quad (3.29)$$

où $b_s = f^*(p_s)$, $A_{si} = \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i}$ et $x_j = f_j$.

L'avantage de l'approche de Lévesque (2004) par rapport à la méthode de Schapery (1962) réside dans le fait que les temps caractéristiques θ_i sont indépendants des points de collocation p_s .

Il est possible pour certains problèmes de connaître à l'avance le nombre et les valeurs des temps caractéristiques physiques τ_i . Les temps de calcul θ_i peuvent être assimilés dans ce cas aux τ_i pour avoir une signification physique. Mais dans le cas général, les temps caractéristiques ne sont pas connus. Les données de départ sont les comportements des matériaux constitutifs du milieu hétérogène et un intervalle temporel d'étude $[t_1, t_2]$. Les θ_i sont alors à fixer a priori par l'utilisateur. Leur choix doit permettre de contrôler les variations de l'approximation (3.21) sur

l'étendue de l'intervalle d'étude et la méthode de collocation détermine les meilleures contributions de ces temps. Pour une bonne précision, la somme de l'approximation doit contenir assez de temps caractéristiques afin de contrôler les variations à long et court termes. Si des temps caractéristiques manquent, il y a un risque de voir apparaître des écarts vers l'une ou l'autre des extrémités de l'intervalle $[t_1, t_2]$ ou osciller à l'intérieur de cet intervalle. Comme les temps caractéristiques sont fixés par l'utilisateur, il y a un risque qu'ils perdent leur signification physique et que l'approximation ait uniquement un sens mathématique⁴.

Les temps caractéristiques τ_i sont en vérité indépendants de l'intervalle d'étude, ils dépendent uniquement des propriétés des matériaux. Mais en pratique, plusieurs auteurs (Lévesque *et al.*, 2007; Granger, 1995), qui ont traité des problèmes de viscoélasticité, recommandent de considérer une distribution logarithmique des θ_i sur une dilatation de l'intervalle d'étude $[t_1, t_2]$. Ce choix est motivé par le fait qu'en pratique, les fonctions relatives à la viscoélasticité linéaire sont approchées par des sommes d'exponentielles où il y a un ou deux termes par décade (Lévesque *et al.*, 2007; Bouleau, 1991). Lévesque *et al.* proposent de distribuer les θ_i d'une manière logarithmique sur l'intervalle $[\frac{t_1}{1-c_\theta}, \frac{t_2}{1+c_\theta}]$, qui est une dilatation sur l'échelle logarithmique d'un coefficient c_θ de l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Quant aux points de régression p_s , ils doivent permettre de décrire toutes les variations de la fonction f^* . Leur densité doit alors être plus grande là où la transformée est plus pentue. Lévesque *et al.* proposent en pratique de considérer une distribution logarithmique de ces points sur une dilatation de l'intervalle $[1/t_2, 1/t_1]$ de la même manière que pour les temps caractéristiques en utilisant un autre coefficient de dilatation.

En pratique, une étude préliminaire peut être faite afin d'étudier la précision de l'inversion en fonction des coefficients de dilatation dans l'espace de Laplace-Carson.

La méthode de collocation doit être appliquée en toute rigueur uniquement à la composante transitoire de la fonction viscoélastique. La réponse instantanée et le comportement asymptotique doivent être isolés préalablement. Comme on le verra plus-tard (§ 3.3.6), il est possible dans certains cas de déterminer exactement cette réponse instantanée et cette composante asymptotique à partir de l'expression de la transformée de Laplace-Carson. À défaut, le théorème des limites (3.16) peut être appliqué.

3.2.2.3 Méthode de Rekik - Optimisation non linéaire des temps caractéristiques

La nécessité de fixer a priori les temps caractéristiques θ_i constitue une des faiblesses de la méthode de Schapery (1962), car ce choix influence beaucoup la qualité de l'inversion. Il était naturel de penser à optimiser ce choix. C'est l'idée derrière les travaux de Rekik et Brenner (2011).

4. Il est possible de connaître pour certains modèles le signe des coefficients des exponentielles décroissantes (par exemple, ces coefficients sont positifs si on interprète l'approximation (3.21) comme la fonction de fluage d'un modèle de Maxwell généralisé (Salençon, 2009)).

L'erreur (3.25) est optimisée par rapport aux θ_i et f_i ($\partial\chi^2/\partial\theta_i$, $\partial\chi^2/\partial f_i$). Ceci conduit aux relations :

$$f^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) = \hat{f}^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial f^*(p)}{\partial p} \Big|_{\frac{1}{\theta_i}} = \frac{\partial \hat{f}^*(p)}{\partial p} \Big|_{\frac{1}{\theta_i}} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.30b)$$

L'erreur est optimale quand les transformées et leurs dérivées sont égales aux points $\frac{1}{\theta_i}$.

Le système de la méthode peut être écrit sous forme d'un problème de minimisation non linéaire (éventuellement sous contraintes de signe des coefficients f_i et l'intervalle contenant les temps θ_i) :

$$\min_{\theta_i, f_i} \left[\sum_{i=1}^N \left(f^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) - \hat{f}^*\left(\frac{1}{\theta_i}\right) \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f^*(p)}{\partial p} \Big|_{\frac{1}{\theta_i}} - \frac{\partial \hat{f}^*(p)}{\partial p} \Big|_{\frac{1}{\theta_i}} \right)^2 \right] \quad (3.31)$$

La transformée de Laplace–Carson f^* ainsi que sa dérivée $\frac{\partial f^*(p)}{\partial p}$ doivent alors être évaluées à tous les points $\frac{1}{\theta_i}$. Comme les temps caractéristiques changent à chaque itération dans cette procédure d'optimisation, la transformée doit être réévaluée à chaque pas de calcul. Cette difficulté rend la présente méthode peu pratique pour la méthode de l'inclusion équivalente. Néanmoins, contrairement aux méthodes de Schapery et de Lévesque *et al.*, le seul paramètre à fournir par l'utilisateur est le nombre de temps caractéristiques θ_i . Les valeurs de ces temps ne sont plus considérées comme paramètres (à part le point de départ de l'optimisation, les contraintes sur le signe des f_i et la taille maximale et minimale des θ_i dans le cas d'une optimisation sous contraintes). Ceci représente un des points forts de cette méthode.

3.2.3 Méthode directe

Dans la publication originale de la méthode de collocation, Schapery (1962) présente en introduction la *méthode directe*. Il s'agit d'une méthode d'inversion numérique de la transformée de Laplace, introduite avant la méthode de collocation (Ferry, 1948, Règle d'Alfrey (45)). L'inverse de la transformée de Laplace–Carson est approximée par :

$$g(t) \approx g^*\left(\frac{c}{t}\right) \quad (3.32)$$

où c est une constante.

Cette méthode est justifiée par le fait que $\frac{dg^*(p)}{d \ln p}$ varie *lentement* par rapport à $\ln p$, de même que le taux de fluage par rapport à $\ln t$, pour beaucoup de problèmes viscoélastiques (la variation lente du taux de fluage est illustrée par exemple dans les travaux de Zhang *et al.* (2014)). Cela suggère le changement de variable suivant :

$$\hat{f}(u) = g^*(p) \quad u = \ln p \quad (3.33a)$$

$$f(v) = g(t) \quad v = \ln t \quad (3.33b)$$

En posant $w = u + v$, on a :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(w - u) e^{w - e^w} dw \quad (3.34)$$

Le poids $e^{w - e^w}$ de ce produit de convolution est représenté à la figure 3.4. Vis-à-vis d'une fonction

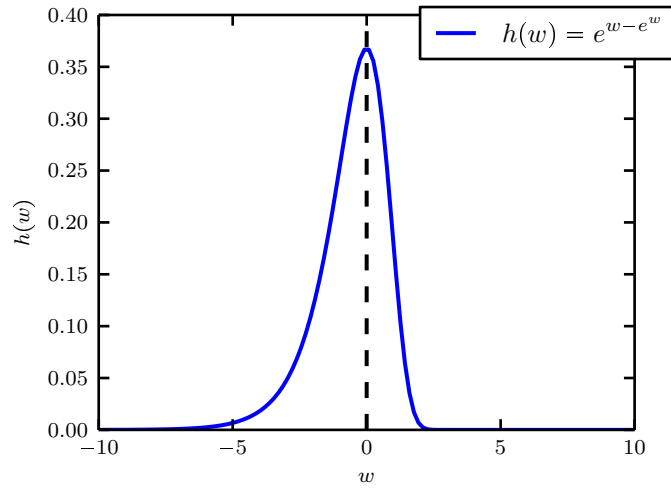


FIGURE 3.4 – Poids $e^{w - e^w}$ du produit de convolution (eq. 3.34)

$f(v)$ qui varie lentement, le poids $e^{w - e^w}$ peut être assimilé à une distribution de Dirac.

Dans sa formulation classique, la constante c est égale à $e^{-\gamma}$, où $\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ est la constante d'Euler. Cela vient du fait que le pic de Dirac est supposé centré en $w_0 = -\gamma$, moyenne de la courbe (Fig. 3.4). Une étude plus exhaustive, présentée par Brenner *et al.* (2002), montre que $e^{-\gamma}$ n'est pas toujours la meilleure valeur à prendre pour le coefficient c .

En tout cas, la méthode directe permet de justifier le comportement similaire sur une échelle logarithmique entre la fonction $g(t)$ et sa transformée de Laplace-Carson $g^*(p)$ évaluée à un coefficient près à $\frac{1}{t}$ sous certaines conditions⁵ qui sont en pratique vérifiées dans le cadre de la viscoélasticité. En effet, les courbes qui seront présentées dans la suite illustreront cette similarité.

Nous aurons intérêt dans la suite à présenter les fonctions de viscoélasticité linéaire sans vieillissement et leurs transformées de Laplace-Carson sur des échelles logarithmiques (changement de variable (3.33a) et (3.33b)). Cette échelle est plus appropriée à la visualisation des variations de ces fonctions.

5. ces conditions portent sur la vitesse de variation de $\frac{dg^*(p)}{d \ln p}$ par rapport à $\ln p$ pour $p \geq 0$. Quand $\frac{d^2 g^*(p)}{d(\ln p)^2}$ est petite, le comportement de $g(t)$ et de $g^*(1/t)$ est similaire sur une échelle logarithmique.

3.3 Optimisation de la méthode de Lévesque

La méthode de collocation a l'avantage d'être numériquement peu coûteuse. À titre de comparaison, nous citons une implémentation numérique de l'algorithme de Gaver–Stehfest que nous avons réalisée pour le code EDF Vi(CA)2T v2 (Tran, 2014; Le Pape *et al.*, 2008), qui sert à estimer les caractéristiques mécaniques effectives des bétons EDF. Bien qu'on n'y utilise en élasticité que des schémas classiques d'homogénéisation, le calcul final est relativement lourd (quelques minutes). Nous avons en effet mentionné parmi les inconvénients de l'algorithme de Gaver–Stehfest le grand nombre de calculs à effectuer dans l'espace de Laplace–Carson pour obtenir un seul point dans l'espace réel (§ 3.2.1). Il y a intérêt à utiliser la méthode de collocation dans ce code afin de réduire le temps de calcul. Sauf que cette dernière, bien que moins coûteuse, comporte beaucoup de paramètres d'entrée pour lesquels il n'y a pas de manière systématique pour les choisir objectivement.

Comme on a vu précédemment (§ 3.2.2.1 et 3.2.2.2), le choix *a priori* des temps caractéristiques de l'approximation en se basant uniquement sur un intervalle d'étude est une limite à la méthode de collocation. Il était naturel de penser à améliorer le choix de ces temps. On trouve une telle idée dans les travaux de Rekik et Brenner (2011) qui proposent une optimisation non linéaire des temps caractéristiques choisis pour la méthode de Schapery (1962) (§ 3.2.2.3). Mais dans cette dernière approche, la transformée de Laplace–Carson f^* doit être évaluée aux points $\frac{1}{\theta_i}$ à chaque pas d'itération dans cette procédure d'optimisation non linéaire. Quand l'évaluation de la transformée de Laplace–Carson n'est pas coûteuse, l'optimisation proposée par Rekik et Brenner (2011) peut être utilisée. Mais dans le cas de la méthode de l'inclusion équivalente, cette dernière risque de demander un grand nombre d'évaluations dans l'espace de Laplace–Carson.

La méthode de Lévesque *et al.* (2007) consiste à séparer les points d'évaluation dans l'espace de Laplace–Carson des inverses des temps caractéristiques. Il est possible ainsi avec cette méthode d'évaluer une fois la fonction à inverser aux points de collocation p_s et de procéder par la suite à l'optimisation des temps caractéristiques. Cette optimisation ne coûte plus que l'effort numérique nécessaire à l'algorithme d'optimisation lui-même.

L'optimisation qu'on souhaite faire se base ainsi sur l'approche de Lévesque *et al.* plutôt que sur l'approche classique de Schapery. Le problème d'optimisation consiste à minimiser une erreur χ^2 :

$$\min_{\theta_i, f_i} \chi^2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \quad (3.35)$$

où, $\boldsymbol{\theta}$ et \mathbf{f} sont deux vecteurs de même dimension, constitués respectivement par les différents θ_i et f_i pour $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Dans notre cas, χ^2 est définie de la façon suivante :

$$\chi^2 = \sum_{s=1}^S \left[f^*(p_s) - \sum_{i=1}^N f_i \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} \right]^2 \quad (3.36)$$

où les θ_i sont les temps caractéristiques à optimiser.

Les avantages et les limites de l'optimisation seront discutés dans la suite en se basant sur des exemples d'application. Mais, avant de parler de l'optimisation des temps caractéristiques, il

faut répondre aux questions concernant le choix des points de collocation p_s où la transformée de Laplace–Carson est évaluée pour l’approche de Lévesque *et al.* (2007). On trouve dans la littérature des recommandations quant au choix de ces points, mais ces recommandations sont d’ordre qualitatif. Le choix des points de collocation est crucial dans notre cas parce que chaque point correspond à un calcul avec la méthode de l’inclusion équivalente. Il est dans notre intérêt de réduire au maximum le nombre de ces points sans risquer d’affecter la qualité de l’inversion.

Nous aurons besoin dans ce qui va suivre d’évaluer la qualité de l’inversion numérique. Dans le cas général, elle peut être évaluée par l’erreur quadratique χ^2 (3.36). Cette dernière peut être calculée dans tous les cas car elle ne fait intervenir que les valeurs de la transformée de Laplace–Carson d’une fonction aux points de collocation p_s (qui est la seule information dont on dispose). Dans les cas où les calculs dans l’espace de Laplace–Carson ne sont pas coûteux, on peut également calculer l’erreur relative suivante sur un intervalle donné de l’espace de Laplace–Carson $[p_{\min}, p_{\max}]$:

$$E_p = \sqrt{\frac{\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} [f^*(p) - \hat{f}^*(p)]^2 dp}{\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} [f^*(p)]^2 dp}} \quad (3.37)$$

Cette erreur relative sera calculée numériquement. On peut également calculer une erreur relative dans le domaine temporel si la référence y est connue :

$$E_t = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \hat{f}(t)]^2 dt}{\int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt}} \quad (3.38)$$

Afin d’étudier cette nouvelle approche, nous commencerons par proposer quelques fonctions viscoélastiques de référence, provenant de l’homogénéisation par des schémas d’Eshelby de quelques modèles rhéologiques simples. Ces cas de référence permettront d’illustrer l’apport de cette méthodologie, la confronter aux techniques existantes et étudier ses limites.

3.3.1 Calculs de référence

Dans ce qui suit, nous présentons trois problèmes de viscoélasticité linéaire sans vieillissement que nous utiliserons comme cas de référence :

- schéma de Mori–Tanaka avec un biphasé de Maxwell incompressible (Rougier et Zaoui, 1994) : nous nous intéresserons à la fonction de relaxation homogénéisée. Cette fonction est très simple car ne contient que deux temps caractéristiques (elle a également servi de référence dans d’autres travaux sur l’optimisation des temps caractéristiques (Rekik et Brenner, 2011) de la méthode de collocation),
- schéma de Mori–Tanaka avec matrice de Burgers et inclusions élastiques (Le, 2008) : cet exemple est plus proche des modèles qu’on considère pour le béton. Nous nous intéresserons à la fonction de fluage longitudinal sous un chargement uniaxial. Cette dernière s’écrit sous forme d’une somme de Prony et d’un terme affine. Il y a des techniques qui permettent de calculer à l’avance le terme affine. La somme de Prony servira ainsi d’un second cas de référence,

- schéma auto-cohérent avec un biphasé de Maxwell incompressible (Beurthey et Zaoui, 2000) : cet exemple, contrairement aux deux précédents, est caractérisé par un spectre continu. Il est alors impossible d’avoir une approximation exacte de la fonction viscoélastique par la méthode de collocation dans ce cas. Néanmoins, l’optimisation des temps caractéristiques peut améliorer considérablement la précision de la méthode de collocation.

3.3.1.1 Schéma de Mori-Tanaka avec un biphasé de Maxwell incompressible

Dans cet exemple, on considère la composante déviatorique de la fonction de relaxation homogénéisée $r_{\text{MT}}(t)$ d’un biphasé dont les deux phases suivent un comportement de Maxwell de module de cisaillement élastique μ_α et de temps caractéristiques $\tau_\alpha = \eta_\alpha^{\text{d}}/\mu_\alpha$ où α est l’indice de phase ($\alpha = 0$ renvoie à la phase matricielle et $\alpha = 1$ à la phase inclusionnaire.).

Comme cela fut mentionné avant, le modèle de Maxwell n’est pas assez complexe pour pouvoir représenter correctement le comportement du béton. On s’est intéressé à cet exemple dans le but d’évaluer nos outils d’inversion de la transformée de Laplace–Carson par la suite. Cet exemple est traité par Rougier et Zaoui (1994) et utilisé par Rekik et Brenner (2011) comme exemple d’application de leur méthode.

La partie déviatorique de la loi de comportement (fonction de relaxation) de la phase α est donnée par :

$$\mathbb{R}_\alpha(t) : \mathbb{K} = 2G_\alpha \mathbb{K} = 2\mu_\alpha e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}} \mathbb{K} \quad (3.39)$$

Le comportement d’une phase est entièrement défini par sa partie déviatorique, donc par le scalaire $G_\alpha(t)$, qui s’écrit dans l’espace de Laplace–Carson comme :

$$G_\alpha^*(p) = \mu_\alpha \frac{p\tau_\alpha}{1 + p\tau_\alpha} \quad (3.40)$$

Le comportement homogénéisé en relaxation est une somme de deux exponentielles décroissantes dont les temps caractéristiques sont τ_0 (temps caractéristique de la matrice) et τ' donné par la formule suivante :

$$\tau' = \tau_0 \frac{2f + (5 - 2f) \frac{\tau_1}{\eta_1^{\text{d}}/\mu_0}}{2f + (5 - 2f) \frac{\tau_0}{\eta_1^{\text{d}}/\mu_0}} \quad (3.41)$$

La composante de cisaillement de la fonction de relaxation est donnée par :

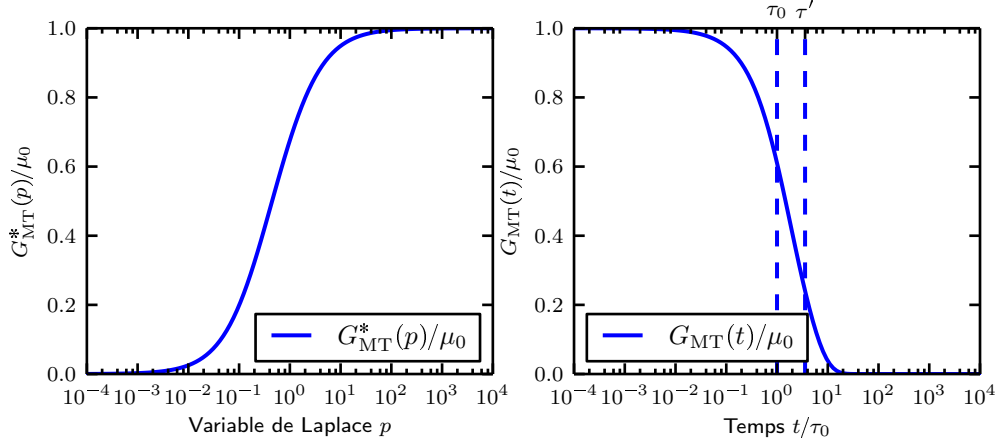
$$G_{\text{MT}}(t) = \frac{b_e \eta_0^{\text{d}}}{a_v(\tau_0 - \tau')} \left[\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} \right) e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) e^{-\frac{t}{\tau'}} \right] \quad (3.42)$$

où $a_v = \frac{5}{2\eta_1^{\text{d}}} - f \left(\frac{1}{\eta_1^{\text{d}}} - \frac{1}{\eta_0^{\text{d}}} \right)$, $b_e = \frac{5}{2\mu_0} + \frac{3}{2}f \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0} \right)$ et f est la fraction volumique des inclusions. τ a la dimension d’un temps. Il permet de réduire la taille de l’expression de $G_{\text{MT}}(t)$.

Pour nos applications numériques, nous allons considérer le jeu de paramètres présenté à la table 3.2. Dans ce cas, on a $\tau' = 3.57143\tau_0$, $\tau = 1.36986\tau_0$, $a_v = 1.4$ et $b_e = 5.0$. Les fonctions $G_{\text{MT}}(t)$ et sa transformée de Laplace–Carson sont représentées dans la figure 3.5.

f	μ_0	μ_1	τ_1/τ_0
0.5	0.5	0.5	10

TABLE 3.2 – Application numérique pour le problème de Mori–Tanaka avec des phases de Maxwell

FIGURE 3.5 – Composante déviatorique $G_{MT}(t)$ de la fonction de relaxation d'un biphasé de matériaux de Maxwell (droite) et sa transformée de Laplace–Carson (gauche).

3.3.1.2 Schéma de Mori-Tanaka avec matrice de Burgers et inclusions élastiques

Dans cet exemple, considérons le cas de référence d'un milieu biphasé de type matrice-inclusions, dont les inclusions sont élastiques linéaires et la matrice est viscoélastique linéaire non vieillissante de comportement Burgers. Les modules isotropes des inclusions sont k_i et μ_i et les modules de la matrice sont ceux présentés à la table 3.1. Soit $f = 0.50$ la fraction volumique de la phase inclusionnaire. On applique le schéma de Mori–Tanaka dans l'espace de Laplace–Carson pour homogénéiser ce problème.

En se rappelant des définitions des tenseurs de comportement pour le modèle de Burgers (3.17), la transformée de Laplace–Carson de la fonction de relaxation est (Nguyen, 2010) :

$$\mathbb{R}_m^*(p) = (p\mathbb{C}_K + p^2\mathbb{H}_K) : (\mathbb{X} + p\mathbb{Y} + p^2\mathbb{Z})^{-1} \quad (3.43)$$

avec :

$$\mathbb{X} = \mathbb{C}_K : \mathbb{H}_K^{-1} \quad (3.44a)$$

$$\mathbb{Y} = \mathbb{I} + \mathbb{C}_K : \mathbb{C}_M^{-1} + \mathbb{H}_K : \mathbb{H}_M^{-1} \quad (3.44b)$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{H}_K : \mathbb{C}_M^{-1} \quad (3.44c)$$

Les fonctions de relaxation en compression et en cisaillement sont alors :

$$K_m^* = \frac{1}{\frac{1}{k_M} + \frac{1}{p\eta_{sM}} + \frac{1}{p\eta_{sK} + k_K}} = \frac{\eta_{sK}p^2 + k_Kp}{\frac{\eta_{sK}}{k_M}p^2 + \left(1 + \frac{\eta_{sK}}{\eta_{sM}} + \frac{k_K}{k_M}\right)p + \frac{k_K}{\eta_{sM}}} \quad (3.45a)$$

$$G_m^* = \frac{1}{\frac{1}{\mu_M} + \frac{1}{p\eta_{dM}} + \frac{1}{p\eta_{dK} + \mu_K}} = \frac{\eta_{dK}p^2 + \mu_Kp}{\frac{\eta_{dK}}{\mu_M}p^2 + \left(1 + \frac{\eta_{dK}}{\eta_{dM}} + \frac{\mu_K}{\mu_M}\right)p + \frac{\mu_K}{\eta_{dM}}} \quad (3.45b)$$

avec $\mathbb{R}_m^* = 3K_m^*\mathbb{J} + 2G_m^*\mathbb{K}$

L'application du schéma de Mori-Tanaka dans l'espace de Laplace-Carson consiste à remplacer dans l'expression de ce schéma les modules de rigidité de la matrice par K_m^* et G_m^* et ceux des inclusions par k_i et μ_i . Les modules effectifs sont notés K_{hom}^* et G_{hom}^* . La transformée de Laplace-Carson de la fonction de relaxation effective est :

$$\mathbb{R}_{\text{hom}}^* = 3K_{\text{hom}}^*\mathbb{J} + 2G_{\text{hom}}^*\mathbb{K} \quad (3.46)$$

Nous nous intéresserons dans la suite à une expérience de fluage uniaxial : soit une éprouvette constituée d'un matériau composite de type matrice-inclusions, dont la matrice est de comportement Burgers et les inclusions sont élastiques linéaires. Les propriétés effectives de ce matériau sont estimées par le schéma de Mori-Tanaka. Cette éprouvette est sous un chargement unitaire appliqué à l'instant $t = 0$ dans la direction \underline{e}_3 , engendrant dans le matériau un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. La déformation dans cette éprouvette est égale à :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \mathbb{F}^* : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \left(\frac{1}{3K_{\text{hom}}^*} \mathbb{J} + \frac{1}{2G_{\text{hom}}^*} \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.47)$$

La fonction de fluage dans la direction longitudinale s'écrit sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{\varepsilon_{33}(t)}{\sigma_0} = F_{3333}(t) = \underbrace{\sum_i g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}}_{g(t)} + \frac{t}{T} + C \quad (3.48)$$

Comme le montre le paragraphe 3.3.6, il est possible de calculer préalablement le terme constant C et le coefficient asymptotique $1/T$ (on va supposer ces termes connus dans nos applications).

Les données numériques utilisées pour la matrice sont proposées dans la thèse de Le (2008) (table 3.3.1.2) et les modules de compression et de cisaillement des inclusions sont respectivement $k_i = 52.17\text{GPa}$ et $\mu_i = 28.35\text{GPa}$.

Pour ce jeu de paramètres, l'expression numérique de la fonction de référence $f(t) = F_{3333}(t)$ est donnée par $f(t) = g(t) + \frac{t}{T} + C$, avec : $C = 0.593576 \times 10^{-1}$, $T = 0.267620 \times 10^{-4}$ et les 9

	Partie de Maxwell		Partie de Kelvin	
	Ressort	Pot Visqueux	Ressort	Pot Visqueux
Sphérique	k_M 12.57GPa	η_{sM} $5.60 \cdot 10^3 \text{GPa} \cdot \text{j}$	k_K 4.49GPa	η_{sK} $1.23 \cdot 10^2 \text{GPa} \cdot \text{j}$
Déviatorique	μ_M 7.76GPa	η_{dM} $5.47 \cdot 10^3 \text{GPa} \cdot \text{j}$	μ_K 5.13GPa	η_{dK} $1.15 \cdot 10^2 \text{GPa} \cdot \text{j}$

TABLE 3.3 – Données numériques d'un mortier de chaux de comportement Burgers (Le, 2008)

i	g_i	τ_i
1	-0.105639×10^{-4}	8.04400
2	-0.236032×10^{-3}	8.66410
3	-0.430206×10^{-3}	9.21854
4	-0.186360×10^{-1}	22.3293
5	-0.363835×10^{-2}	24.3013
6	-0.734669×10^{-2}	25.3552
7	-0.529774×10^{-5}	1747.72
8	-0.819074×10^{-4}	1798.76
9	-0.315365×10^{-3}	1841.34

TABLE 3.4 – Temps caractéristiques τ_i et coefficients g_i de la somme de Prony de la fonction de fluage $f(t)$

termes de la somme de Prony $g(t) = \sum_i g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$ tels que présentés à la table 3.4. La figure 3.6 donne une représentation graphique des coefficients de la somme de Prony $g(t)$. Cette représentation sera utilisée ultérieurement pour comparer les temps caractéristiques de cet exemple à ceux de quelques approximations.

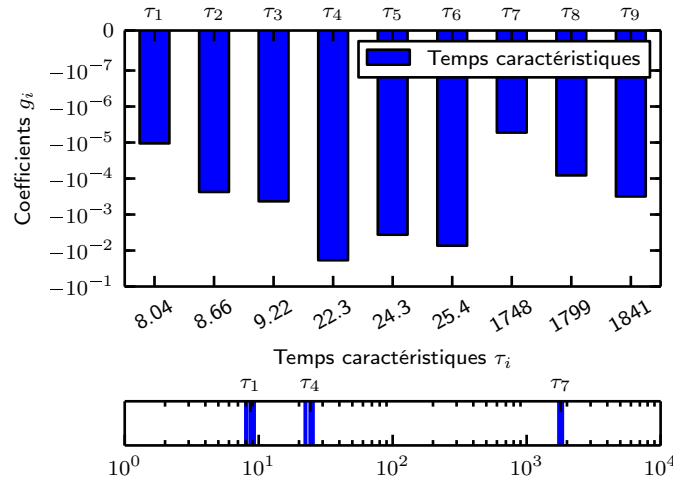


FIGURE 3.6 – Coefficients des temps caractéristiques τ_i de l'exemple (Mori–Tanaka - Burgers)

3.3.1.3 Schéma auto-cohérent avec un biphasé de Maxwell incompressible

Nous présentons ici l'exemple d'un matériau hétérogène constitué de deux phases incompressibles, les deux ayant en cisaillement un comportement viscoélastique de Maxwell de rigidités élastiques μ_1 et μ_2 et de temps caractéristiques τ_1 et τ_2 ($\tau_\alpha = \frac{\eta_\alpha^d}{\mu_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$). On applique le schéma auto-cohérent pour calculer la composante déviatorique de la fonction de relaxation homogénéisée G_{SC} .

Beurthey et Zaoui montrent que G_{SC} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$G_{SC} = \int_0^{+\infty} g_{SC}(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (3.49)$$

où $g_{SC}(\tau)$ est le spectre de relaxation de la fonction G_{SC} donné par l'expression suivante :

$$g_{SC}(\tau) = H_{[t_1, t_2]}(\tau) \frac{k_c \tau_1 \tau_2}{\pi \sqrt{t_1 t_2}} \frac{\sqrt{(\tau - t_1)(t_2 - \tau)}}{\tau(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} + \delta(\tau - \tau_1)g_1 + \delta(\tau - \tau_2)g_2 \quad (3.50)$$

où δ est la distribution de Dirac, H_D est la fonction indicatrice de l'intervalle D , t_1 et t_2 sont deux temps entre τ_1 et τ_2 s'écrivant en fonction des temps caractéristiques des deux phases, de leurs viscosités et leurs fractions volumiques, k_c est une constante qui s'écrit en fonction des fractions

f	μ_1	μ_2	τ_1	τ_2
0.5	0.5	0.05	1	10

TABLE 3.5 – Application numérique pour le problème du schéma auto-cohérent avec un biphasé de Maxwell, f étant la fraction volumique de la phase 2

volumiques et des viscosités des deux phases et g_1 et g_2 sont les coefficients des exponentielles décroissantes de temps caractéristiques τ_1 et τ_2 :

$$\begin{cases} g_1 = \frac{3-5f}{3}\mu_1 & \text{si } f \leq \frac{3}{5} \\ g_1 = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g_2 = \frac{5f-2}{3}\mu_2 & \text{si } f \geq \frac{2}{5} \\ g_2 = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.51)$$

Remarque. L'expression analytique de la transformée de Laplace–Carson de G_{SC} (qui n'est pas reproduite ici) est également établie par les auteurs (Beurthey et Zaoui, 2000).

Pour nos applications numériques, on considère le jeu de paramètres de la table 3.5. Dans ce cas, on a $t_1 = 1.09092$, $t_2 = 9.90908$, $k = 0.136994$, $g_1 = 8.33333 \times 10^{-2}$ et $g_2 = 8.33333 \times 10^{-3}$.

La figure 3.7 représente le spectre continu et les points discrets à τ_1 et τ_2 relatifs à cette application numérique. La fonction $G_{SC}(t)$ et sa transformée de Laplace–Carson sont représentées

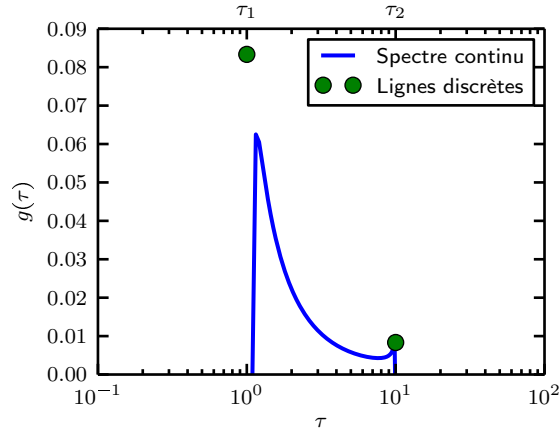


FIGURE 3.7 – Spectre de relaxation g_{SC}

à la figure 3.8.

3.3.2 Choix des points de collocation p_s

Comme pour les temps caractéristiques θ_i , le choix des points de collocation représente l'une des difficultés de l'approche de Lévesque *et al.* (2007). D'un point de vue pratique, on cherche à réduire le nombre de ces points sans risquer de compromettre la qualité de l'inversion.

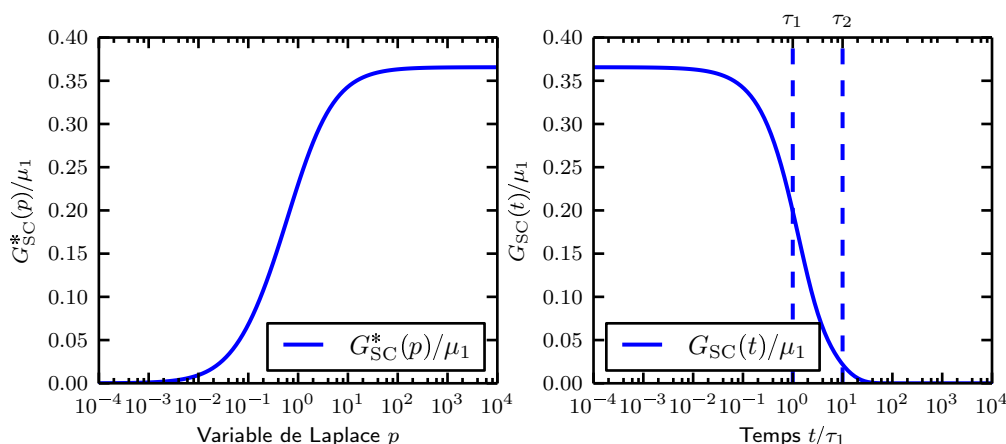


FIGURE 3.8 – Composante déviatorique $G_{SC}(t)$ de la fonction de relaxation d'un biphasé de matériaux de Maxwell (droite) et sa transformée de Laplace–Carson (gauche) pour les paramètres $f = 0.5$, $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.05$, $\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = 10$.

Comme dit précédemment, la transformée de Laplace–Carson est connue uniquement aux points p_s . Ces derniers doivent alors être distribués de manière à décrire fidèlement la forme de la transformée. Classiquement, les points p_s sont distribués logarithmiquement à l'intérieur d'un intervalle. La distribution logarithmique est en effet adaptée pour les fonctions de viscoélasticité car ces dernières varient lentement sur l'échelle logarithmique. Il faut néanmoins que l'intervalle sur lequel sont choisis ces points soit assez grand pour contenir toute l'information nécessaire à décrire la transformée.

Dans ce qui suit, nous nous basons sur le cas de référence du biphasé de Maxwell homogénéisé par le schéma de Mori–Tanaka (§ 3.3.1.1) pour illustrer la méthodologie du choix des points de collocation et montrer l'importance qui doit être accordée à ce choix. On s'intéresse à la fonction de retard en cisaillement (3.42) qu'on va noter $f(t)$:

$$f(t) = G_{MT}(t) \quad (3.52)$$

Cette fonction s'écrit sous forme d'une somme de deux exponentielles décroissantes de temps caractéristiques $\tau_0 = 1.00$ et $\tau' = 3.57$. Nous allons étudier cette fonction sur l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}] = [1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^2]$. On choisit 12 temps caractéristiques θ_i distribués logarithmiquement sur cet intervalle (ce choix restera fixé pour toute cette étude).

Pour les points de collocation p_s , on va s'intéresser à quatre cas :

- distribution des points p_s conduisant à une inversion de précision convenable. Cette distribution sera notre cas de référence,
- emplacement des points p_s . Nous déplaçons le choix de référence de manière à ne plus couvrir toutes les variations de la transformée afin d'étudier l'évolution de l'erreur E_t ,
- nombre de points p_s . On garde les points p_s distribués sur le même intervalle que le cas de référence en augmentant et en diminuant leur nombre,
- confrontation des distributions logarithmique et linéaire des points p_s .

Distribution logarithmique de référence

On considère une distribution logarithmique de 24 points entre $p_{\min} = 1 \times 10^{-2}$ et $p_{\max} = 1 \times 10^2$. La figure 3.9 représente la fonction $f(t)$ ainsi que sa transformée de Laplace–Carson $f^*(p)$. Elle situe également les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' , les temps caractéristiques de la méthode de collocation θ_i et les points de collocation p_s . Dans ce cas de référence, les points de

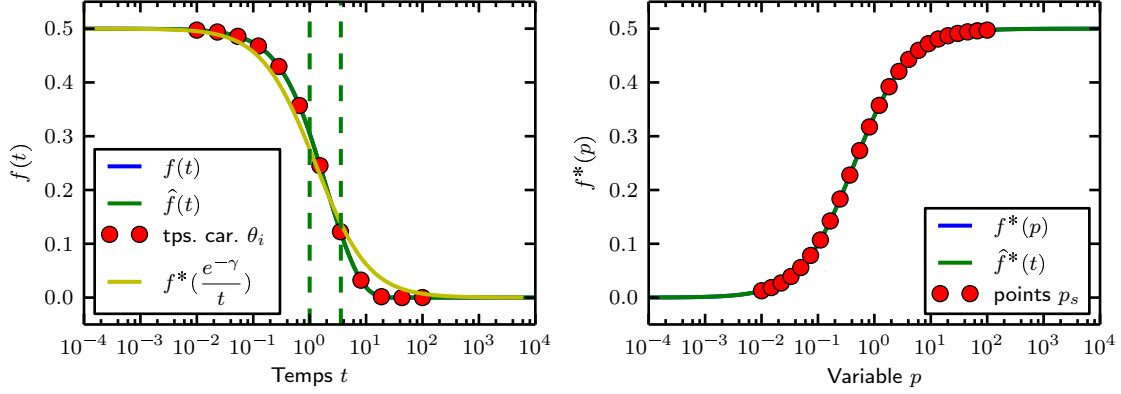


FIGURE 3.9 – Fonction $f(t)$ (gauche) et sa transformée de Laplace–Carson $f^*(p)$ (droite) pour le choix de référence des points de collocation p_s (distribution logarithmique de 24 points sur $\left[\frac{1}{t_{\max}}, \frac{1}{t_{\min}}\right]$). Les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' sont indiqués par les lignes verticales en pointillé.

collocation sont choisis de manière à représenter toutes les variations de la fonction $f^*(p)$ dans l'espace de Laplace–Carson. On note que l'ensemble des θ_i comporte des points du même ordre de grandeur que les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' .

Remarque. On a noté dans le paragraphe sur la méthode directe (§ 3.2.3) la similitude entre une fonction et sa transformée évaluée à $\frac{1}{t}$ (à un coefficient près). Cette remarque est illustrée par la courbe $f^*(\frac{e^{-\gamma}}{t})$ de la figure 3.9.

L'application de la méthode de collocation pour cette configuration donne une erreur relative sur le domaine temporel E_t de l'ordre de 0.2%.

Mauvaise représentation de la transformée par les points de collocation

Dans ce qui suit, nous replaçons les points de collocation p_s de manière à ne plus couvrir toutes les variations de la transformée $f^*(p)$. À cet effet, la figure 3.10 présente les résultats d'un exemple où l'on décale les points de collocation de référence par une décade à droite puis à gauche. Dans les deux cas, l'erreur relative E_t augmente à 10%.

En tenant compte de la remarque sur la ressemblance entre une fonction et de sa transformée de Laplace–Carson (§ 3.2.3 - méthode directe), il est possible en général de prédire la forme de l'inverse avant d'avoir fait l'inversion en traçant cette dernière sur une échelle logarithmique. Ceci

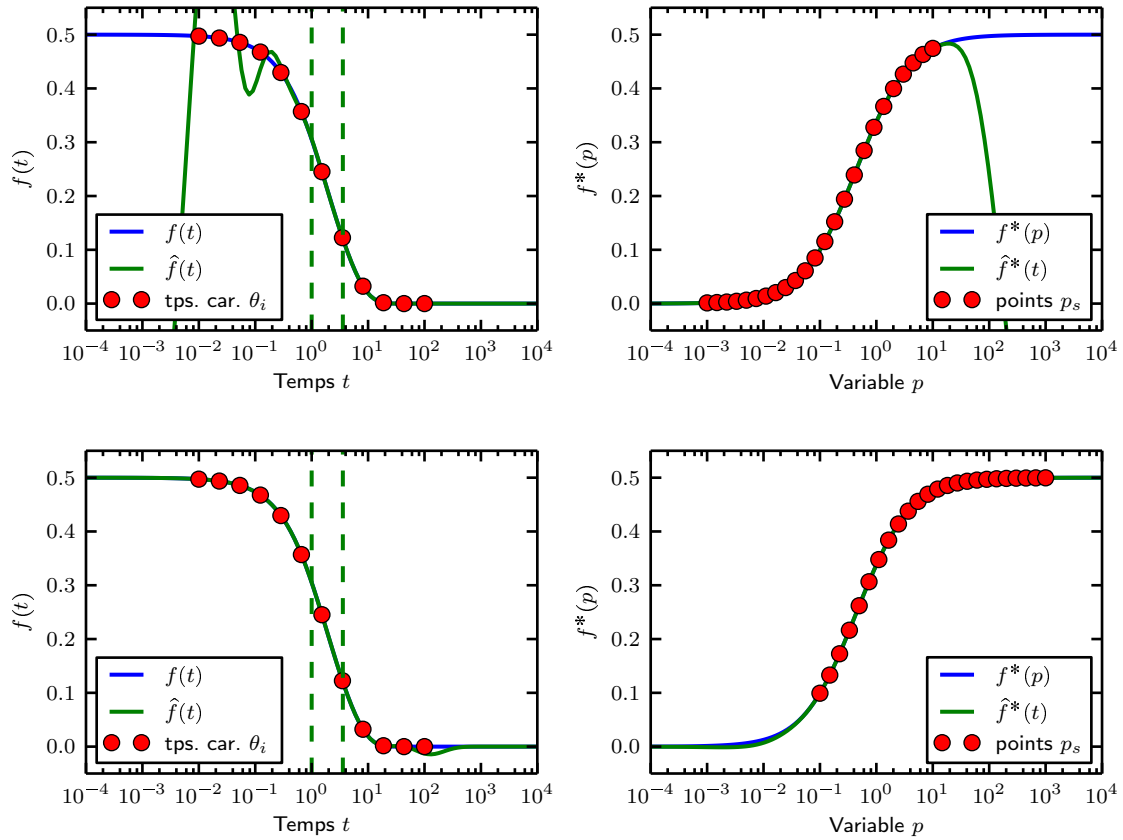


FIGURE 3.10 – Même calcul qu’en figure 3.9 avec décalage des points de collocation d’une décade vers la gauche (haut) et vers la droite (bas). Les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' sont indiqués par les lignes verticales en pointillé.

permet de donner une information sur la qualité de l'approximation et vérifier grossièrement la présence d'écarts. Dans l'exemple de la figure 3.10, le décalage des points de collocation d'une décade à gauche (par rapport à la configuration de référence) fait apparaître un écart entre la transformée $f^*(p)$ et son approximation $\hat{f}^*(p)$ sur le côté droit où manquent des points de collocation. Cet écart se traduit sur les inverses $f(t)$ et $\hat{f}(t)$ par un écart sur le court terme. Pareillement, le décalage des points de collocation vers la droite fait apparaître un écart vers le long terme.

La représentation des fonctions $f(t)$ et $\hat{f}(t)$ sur une échelle logarithmique peut donner l'illusion que l'erreur relative E_t calculée sur l'ensemble de l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$ est plus grande pour le premier cas (décalage des p_s à gauche) que pour le second (décalage des p_s à droite). Comme cette erreur est calculée sur l'échelle linéaire, bien que le décalage dans le premier cas soit plus grand, les deux erreurs E_t sont du même ordre de grandeur. Cependant, il est inenvisageable de se fier à l'approximation dans le premier cas pour le court terme.

Effet du nombre de points de collocation

L'augmentation du nombre de points de collocation p_s donne plus d'informations sur la transformée. On peut s'attendre théoriquement à ce que cela joue en faveur de la qualité de l'approximation. La figure 3.11 représente les résultats d'un exemple où l'on change le nombre de points de collocation par rapport au cas de référence. Dans un premier temps, on diminue le nombre de points p_s à 12, distribués logarithmiquement entre p_{\min} et p_{\max} . Dans un second temps, on augmente le nombre de ces points à 48, distribués de la même manière sur le même intervalle. L'erreur relative E_t pour les trois cas étudiés de 12, 24 (configuration de référence) et 48 points de collocation est de l'ordre de 0.2%. Comme le montre la figure 3.11, dans le cas de la réduction du nombre de points p_s , il reste assez de points pour bien décrire les variations de la transformée. L'augmentation du nombre de points est inutile ici car n'ajoute pas plus d'informations que le cas de référence. Il y a en plus le risque d'accumuler les erreurs de virgule flottante par l'augmentation de la densité des points p_s .

Distribution des points de collocation

Nous terminons cette étude par le changement de la distribution des points de collocation. On considère cette fois les points p_s répartis linéairement entre p_{\min} et p_{\max} . L'exemple de la figure 3.12 reprend la configuration de référence avec une distribution linéaire des points de collocation. Comme le montre le principe de la méthode directe, les transformées des fonctions viscoélastiques varient lentement par rapport à $\ln p$ (§ 3.2.3). Ainsi, à moins de prendre un nombre très important de points de collocation, il est difficile de décrire finement les variations d'une transformée avec une distribution linéaire. L'exemple de la figure 3.12 donne une erreur relative E_p de l'ordre de 10%. L'écart entre la fonction $f^*(t)$ et son approximation $f_{\text{coll}}^*(t)$ se produit à l'intérieur de l'intervalle $[p_{\min}, p_{\max}]$, là où manquent des points de collocation.

Pour conclure, on rappelle que le choix des points de collocation peut avoir une grande influence sur la qualité d'une inversion. Ces points doivent être placés de manière à bien décrire les variations de la transformée de la fonction viscoélastique. En pratique, on choisit un intervalle

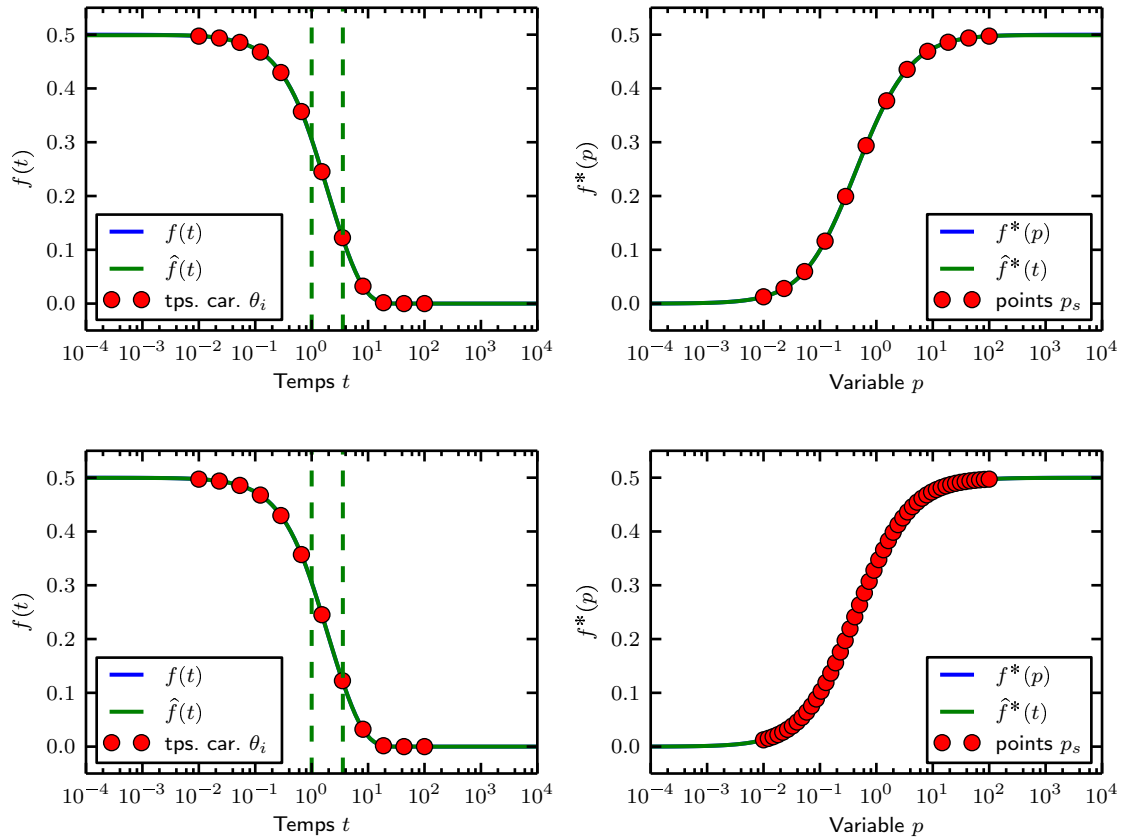


FIGURE 3.11 – Même calcul qu'en figure 3.9 avec diminution du nombre de points de collocation à 12 (haut) et avec augmentation de leur nombre à 48 (bas). Les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' sont indiqués par les lignes verticales en pointillé.

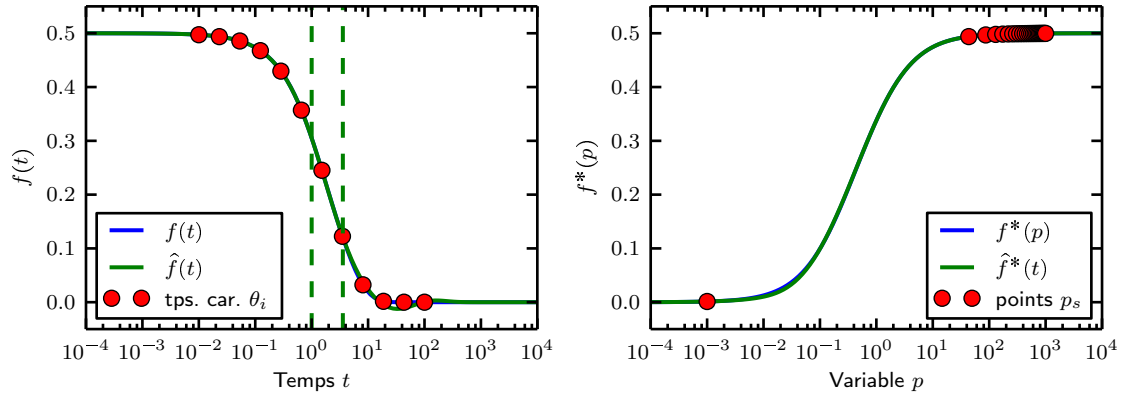


FIGURE 3.12 – Même calcul qu’en figure 3.9 avec une répartition linéaire des points de collocation entre p_{\min} et p_{\max} . Les temps caractéristiques physiques τ_0 et τ' sont indiqués par les lignes verticales en pointillé.

$[p_{\min}, p_{\max}]$ qui contient toute la zone de variation de la transformée. Les points p_s peuvent être distribués logarithmiquement sur cet intervalle. Le nombre de points de collocation dépend de la forme de la fonction, mais du moment où les points p_s *maillent convenablement* la transformée, il devient inutile d’augmenter leur densité. Dans le cas de l’homogénéisation par la méthode de l’inclusion équivalente, la transformée ne peut être tracée que par points, sachant que l’évaluation de chaque point est coûteuse. En pratique, il est possible de s’appuyer sur un schéma plus simple tel que le schéma de Mori–Tanaka pour évaluer une distribution correcte de ces points de collocation.

Si la transformée n’est connue qu’en un certain nombre de points p_s , le traçage de son approximation par la méthode de collocation (qui n’est pas coûteuse numériquement) peut nous informer sur la présence éventuelle d’anomalies. On peut notamment s’appuyer sur la monotonie des fonctions (connue pour un certain nombre de modèles rhéologiques) qui est très facile à perdre si l’inversion n’est pas de bonne qualité.

3.3.3 Optimisation des temps caractéristiques

Une fois les points de collocation choisis pour la méthode de collocation avec l’approche de Lévesque *et al.* (2007), l’optimisation des temps caractéristiques ne demande plus aucun calcul dans l’espace de Laplace–Carson. Seul l’algorithme d’optimisation choisi décide des ressources numériques utilisées. L’utilisation de l’approche de Lévesque *et al.* représente ainsi un très grand avantage dans notre cas, où le calcul dans l’espace de Laplace–Carson est coûteux.

La procédure d’optimisation consiste à minimiser l’erreur quadratique χ^2 (3.36) définie en fonction de l’expression de la méthode de collocation et des valeurs d’une transformée $g^*(p)$ aux points de collocation p_s .

Remarque. Il est possible de pondérer les écarts quadratiques par des coefficients w_s dans l'expression de l'erreur χ^2 afin de donner plus d'importance au court ou au long terme :

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) = \sum_{s=1}^m w_s \left[f^*(p_s) - \sum_{i=1}^N f_i \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} \right]^2 \quad (3.53)$$

Dans la suite, nous prenons tous les coefficients w_s égaux à 1.

Nous utiliserons l'algorithme de Nelder et Mead (1965) pour la minimisation multi-variables. Ce dernier a l'avantage de ne pas nécessiter de connaître le jacobien ou la hessienne de la fonction χ^2 à optimiser. Cependant, des difficultés peuvent être rencontrées quand il s'agit d'optimiser un grand nombre de variables. Nous allons utiliser cet algorithme pour l'optimisation non linéaire des temps caractéristiques θ_i . Le problème d'optimisation est défini comme suit :

$$\min_{\theta_i} \min_{f_i} \chi^2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \quad (3.54)$$

Ainsi, dans chaque itération sur les (θ_i) , les poids f_i sont recalculés par résolution du système linéaire de la méthode de Lévesque *et al.*.

Lorsque le jacobien de la fonction χ^2 est connu analytiquement, on peut également utiliser l'algorithme de Levenberg–Marquardt (Marquardt, 1963; Transtrum et Sethna, 2012). Cet algorithme peut être utilisé pour une optimisation non linéaire à la fois des temps caractéristiques θ_i et des coefficients f_i . Le problème d'optimisation est présenté comme suit :

$$\min_{\theta_i, f_i} \chi^2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}) \quad (3.55)$$

Le jacobien de l'erreur $\chi^2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f})$ est calculé par rapport aux θ_i et f_i :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial f_i} = 2 \sum_{s=1}^m \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} \left[f^*(p_s) - \sum_{i=1}^N f_i \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} \right] \quad (3.56a)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \theta_i} = 2 \sum_{s=1}^m f_i \frac{p_s}{(1 + p_s \theta_i)^2} \left[f^*(p_s) - \sum_{i=1}^N f_i \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} \right] \quad (3.56b)$$

3.3.4 Évaluation de l'optimisation pour des cas de référence

Afin d'illustrer l'apport de l'optimisation des temps caractéristiques, nous proposons des exemples d'applications. Nous considérons les trois cas de référence présentés auparavant :

- application 1 : homogénéisation de Mori–Tanaka d'un biphasé de Maxwell incompressible (fonction de relaxation en cisaillement, somme de deux exponentielles décroissantes - § 3.3.1.1),
- application 2 : homogénéisation de Mori–Tanaka d'un biphasé de matrice de Burgers et d'inclusions élastiques (partie transitoire de la fonction de fluage longitudinal sous contrainte uniaxiale, somme de 9 exponentielles décroissantes - § 3.3.1.2),

- application 3 : homogénéisation par le schéma auto-cohérent d'un biphasé de Maxwell incompressible (fonction de relaxation en cisaillement, spectre de relaxation continu - § 3.3.1.3).

Les applications présentées montrent aussi bien les avantages que les limites de l'optimisation des θ_i . Si l'optimisation marche bien dans le cas simple de la première application, des limites d'ordre numérique sont à considérer dans le cas de la seconde application, conduisant à une approximation certes de meilleure qualité mais à des temps caractéristiques qui n'ont pas forcément un sens physique. Dans la troisième application, on vise à trouver les meilleurs temps caractéristiques discrets pour approcher une fonction à spectre continu. L'approximation dans ce cas ne peut jamais être parfaite, mais l'optimisation des temps caractéristiques permet tout de même d'améliorer sa qualité.

Application 1 : schéma de Mori–Tanaka appliqué à un biphasé de matériaux de Maxwell

Cette application se base sur l'exemple de référence présenté à 3.3.1.1, concernant l'application du schéma de Mori–Tanaka à un biphasé incompressible de phases de Maxwell. On s'intéresse à la fonction de cisaillement $G_{MT}(t)$ définie à l'équation (3.42). Cette équation s'écrit sous forme d'une somme de deux exponentielles décroissantes de temps caractéristiques τ_0 et τ' , où τ_0 est le temps caractéristique de la matrice et τ' est défini par l'équation (3.41).

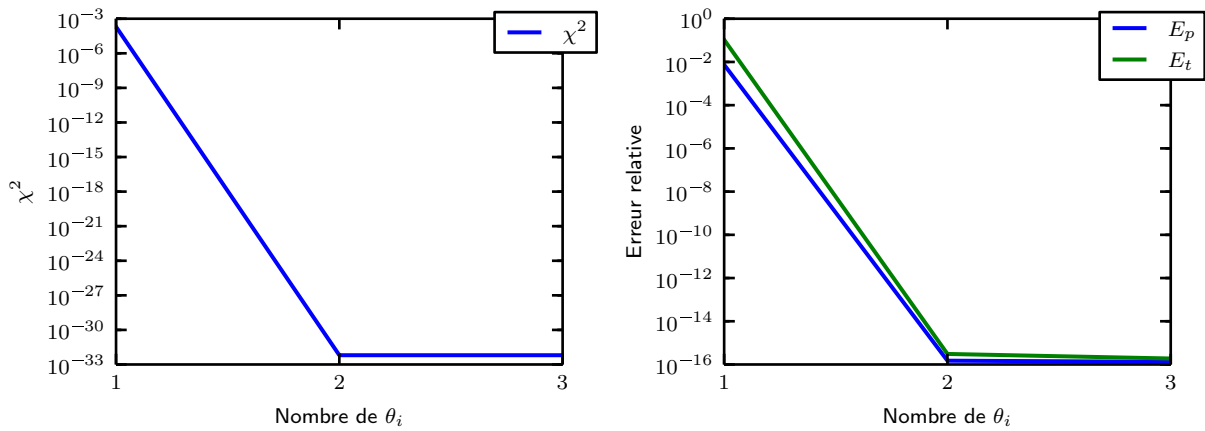


FIGURE 3.13 – Erreur quadratique (gauche) et erreurs relatives E_p et E_t en fonction du nombre de termes dans la somme de Prony.

En se mettant dans le cas où l'on ne connaît pas le nombre de temps caractéristiques de cette fonction, on se propose de commencer par optimiser un seul temps caractéristique θ_1 et d'incrémenter le nombre de θ_i en les optimisant jusqu'à ce que les erreurs E_t , E_p et χ^2 (définies respectivement par (3.38), (3.37) et (3.36)) se stabilisent. La figure 3.13 représente les erreurs E_t , E_p et χ^2 en fonction du nombre de temps caractéristiques optimisés. Les cas où on a une exponentielle unique sont rares (relaxation d'un matériau de Maxwell homogène). La considération d'un seul temps caractéristique est inutile en général. L'application de l'algorithme d'optimisation permet de retrouver les temps caractéristiques exacts de la fonction de relaxation étudiée.

On arrive à une erreur relative de l'ordre de 1×10^{-16} (qui est la précision maximale de la machine et la tolérance du paramètre donnée à l'algorithme d'optimisation Nelder–Mead) aussi bien sur l'espace de Laplace–Carson que sur le domaine temporel.

Application 2 : schéma de Mori-Tanaka sur un biphasé de matrice de Burgers (spectre discret)

Le cas étudié ici est présenté au paragraphe 3.3.1.2. Il s'agit d'un biphasé de matrice de Burgers et d'inclusions élastiques homogénéisé par le schéma de Mori–Tanaka. On considère le matériau est sous contrainte uniaxiale σ_{33} et on observe la déformation longitudinale $f(t)$ qui s'écrit sous cette forme :

$$f(t) = \varepsilon_{33}(t) = \sum_{i=1}^N g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \frac{t}{T} + C \quad (3.57)$$

où C et T sont des constantes.

Comme on va le montrer au paragraphe 3.3.6, la réponse instantanée et le comportement asymptotique peuvent être calculés préalablement. On appliquera ainsi la méthode de collocation uniquement à la somme des exponentielles décroissantes, la partie affine étant supposée connue a priori. On note g cette somme des exponentielles :

$$g(t) = \sum_{i=1}^N g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (3.58)$$

On se met dans le cas où l'on ne connaît pas les temps caractéristiques réels et on se propose d'étudier la fonction sur une période d'à peu près 35 ans. On considère alors l'intervalle d'étude $[t_1, t_2] = [10^{-2}j, 5 \times 10^4 j]$.

Nous allons commencer par une optimisation à plusieurs variables de neuf temps caractéristiques θ_i choisis a priori sur l'intervalle d'étude en utilisant l'algorithme de Nelder et Mead (1965). Comme il s'agit d'optimiser un grand nombre de variables, on s'attend à un manque de précision dans la détermination des temps caractéristiques physiques (§ 3.3.3). Afin d'illustrer la source de ces pertes de précision, on s'intéressera à l'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de temps caractéristiques. Cela nous donnera une idée sur le nombre de θ_i suffisant à atteindre une certaine précision.

Application directe de l'algorithme d'optimisation pour 9 temps caractéristiques

Considérons 9 temps caractéristiques de départ distribués logarithmiquement sur l'intervalle d'étude $[t_1, t_2]$. La figure 3.14 représente l'erreur quadratique χ^2 en fonction de deux temps caractéristiques θ_i , les sept temps caractéristiques restants étant fixés. On observe sur cette figure la présence de minimas locaux. Cela montre que le point de départ de cette optimisation influence le résultat.

Remarque. La figure 3.14 vérifie également le fait que les points θ_i jouent tous le même rôle, le graphe étant symétrique par rapport à la première bissectrice.

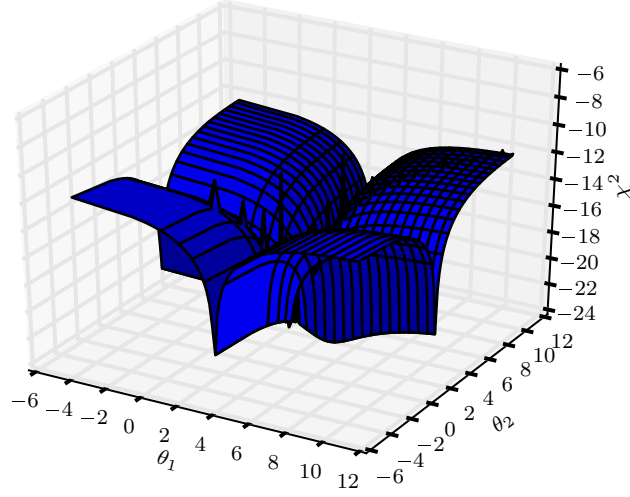


FIGURE 3.14 – Erreur quadratique χ^2 d'une approximation à 9 temps caractéristiques, en fonction de deux temps caractéristiques θ_1 et θ_2 .

	Avant optimisation	Après optimisation
χ^2	8.728×10^{-7}	3.767×10^{-19}
E_p	3.545×10^{-3}	6.659×10^{-10}
E_t	1.476×10^0	3.633×10^{-6}

TABLE 3.6 – Comparaison de l'erreur χ^2 et des erreurs relatives E_p et E_t avant et après l'optimisation

On fixe a priori 15 points de collocation p_s , distribués logarithmiquement dans l'intervalle $[p_{\min}, p_{\max}] = [1/t_2, 1/t_1]$ (avec $p_1 = p_{\min}$ et $p_{15} = p_{\max}$). On optimise 9 temps caractéristiques. Le point de départ pour les temps caractéristiques θ_i est la distribution logarithmique entre $[t_1, t_2]$ (avec $\theta_1 = t_1$ et $\theta_9 = t_2$).

La minimisation multi-variables avec l'algorithme de Nelder et Mead (1965) donne les résultats du tableau 3.6. L'erreur relative E_t calculée dans l'espace réel avant optimisation montre que l'application directe de la méthode de collocation avec un choix a priori des temps caractéristiques n'est pas suffisante pour assurer une bonne inversion. On compense généralement dans ce cas par l'augmentation du nombre de θ_i . L'augmentation du nombre de temps caractéristiques pousse également à augmenter le nombre de points de collocation qui doit être supérieur au nombre de θ_i .

L'exemple choisi ici pose une difficulté ; les temps caractéristiques réels ne sont pas espacés d'une manière uniforme (que ce soit sur l'échelle linéaire ou logarithmique). Il y a trois groupes, chacun de trois τ_i resserrés entre eux. Cela fait augmenter le conditionnement de la matrice du système de la méthode de collocation et joue également en défaveur de l'optimisation. La figure 3.15 comparant les temps caractéristiques optimisés θ_i aux temps caractéristiques physiques

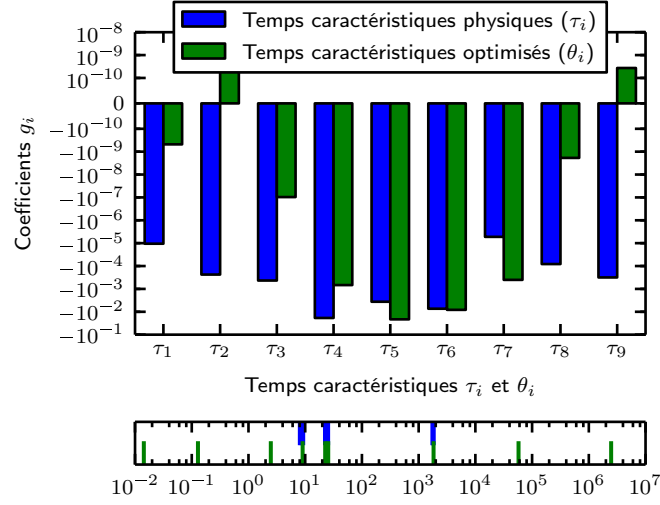


FIGURE 3.15 – Comparaison des temps caractéristiques de la fonction physique et de l’approximation obtenue par la méthode de collocation optimisés (exemple : Mori–Tanaka - Burgers)

montre que l’optimisation n’a permis de placer que quatre temps caractéristiques θ_i au voisinage des temps physiques τ_i . L’algorithme d’optimisation n’a pas permis d’atteindre exactement les temps caractéristiques physiques comme dans le cas précédent (§ 3.3.4). Les coefficients g_i qui minimisent l’erreur χ^2 ne sont ainsi pas forcément du signe attendu.

Qualité de l’approximation en fonction du nombre de temps caractéristiques θ_i Dans le but d’étudier l’évolution de l’erreur quadratique χ^2 , nous allons appliquer la méthode de collocation en ajoutant les temps caractéristiques θ_i un à un. Pour chaque nouveau temps rajouté, l’optimisation est relancée pour les θ_i précédents. On trace ainsi la fonction $\chi^2(\{g_1, \dots, g_i\}, \{\theta_1, \dots, \theta_i\})$ en fonction de θ_i après la minimisation suivante :

$$\min_{\theta_1, \dots, \theta_{i-1}} \min_{f_1, \dots, f_i} \chi^2 \quad (3.59)$$

telle que les f_j sont optimisés linéairement par la méthode de collocation et les θ_j sont calculés par l’algorithme de Nelder et Mead (1965). Le point de départ de chaque optimisation non linéaire à l’étape i correspond à l’ensemble des temps caractéristiques qui minimise χ^2 à l’étape $i - 1$. Les points de collocation p_s sont les mêmes que pour l’application précédente (espacement logarithmique dans $[p_{\min}, p_{\max}]$). La figure 3.16 représente l’erreur quadratique χ^2 correspondant à des approximations à 1, 2, 3 et 6 temps caractéristiques θ_i . Avec un seul temps caractéristique, χ^2 est minimale que voisinage des τ_i des plus grands coefficients g_i (triplet du milieu). En ajoutant un second temps, on remarque l’apparition d’un nouveau pic sur la courbe de χ^2 autour du triplet de droite. Un pic apparaît dans l’étape qui suit autour du troisième triplet de gauche. À partir de cinq temps θ_i , l’erreur χ^2 devient très faible (et très sensible aux erreurs de virgule flottante) et commence à afficher des minimas locaux.

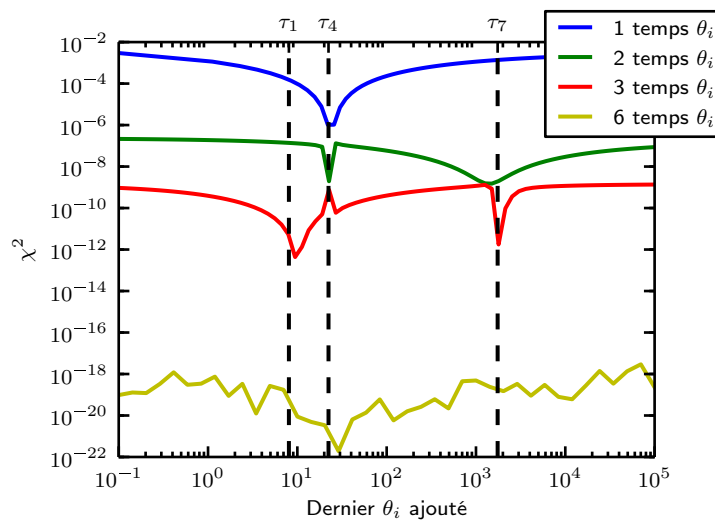


FIGURE 3.16 – Erreur quadratique χ^2 d'une approximation à 1, 2, 3 et 6 temps caractéristiques. Les courbes sont tracées en fonction du dernier temps caractéristique ajouté. Les lignes verticales en pointillé correspondent aux 9 temps caractéristiques physiques.

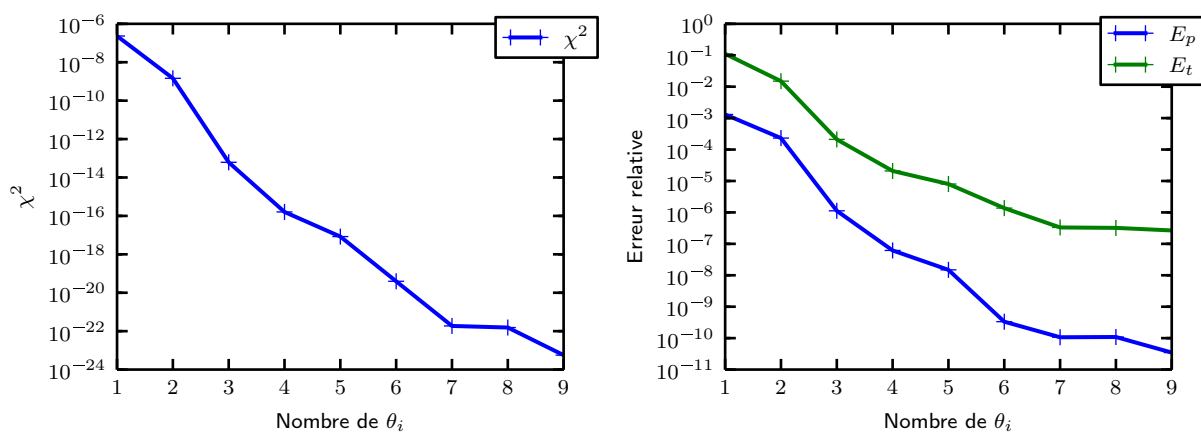


FIGURE 3.17 – Erreur quadratique (gauche) et erreurs relatives E_p et E_t en fonction du nombre de termes dans la somme de Prony.

La figure 3.17 montre l'évolution de l'erreur χ^2 et des erreurs relatives E_p et E_t en fonction du nombre de temps caractéristiques θ_i (qui correspond au nombre de termes dans la somme de Prony). Les erreurs décroissent rapidement au début, mais la vitesse de décroissance diminue à partir de 7 temps θ_i . La diminution de la vitesse d'amélioration de l'erreur revient à des instabilités numériques quand l'erreur quadratique devient très petite et à l'apparition de minimas locaux qui empêchent de trouver les valeurs optimales pour les temps caractéristiques ajoutés.

Comme le montre la figure 3.17, l'erreur χ^2 devient très vite très petite et on ne remarque presque plus la présence de minimas globaux. Elle devient ainsi inexploitable pour l'algorithme d'optimisation, ce qui l'empêche de retrouver exactement les temps caractéristiques physiques.

Il faut noter pour cet exemple la difficulté qu'ajoute la distribution de temps caractéristiques physiques. Le fait que certains de ces temps soient très resserrés entre eux rend difficile l'application de l'algorithme d'optimisation. La fonction étudiée se comporte presque comme si elle ne comportait que trois temps caractéristiques.

Application 3 : schéma auto-cohérent sur un biphasé de Maxwell (spectre continu)

La présente application est basée sur le problème d'un biphasé de matériaux de Maxwell incompressibles homogénéisé par le schéma auto-cohérent (§ 3.3.1.3). On s'intéresse ici à la fonction de relaxation en cisaillement $f(t) = G_{SC}(t)$ (3.49). D'après les travaux de Beurthey et Zaoui (2000), cette fonction est définie par un spectre continu $g_{SC}(t)$ et des points discrets.

Nous essayons dans cet exemple d'approcher cette fonction de spectre continue par une fonction dont le spectre est discret. Dans cet exemple, on ne peut pas prévoir combien de temps caractéristiques θ_i sont nécessaires pour atteindre la meilleure précision. On propose ainsi d'étudier la qualité de l'approximation en fonction du nombre de temps caractéristiques θ_i (la minimisation à l'étape i quand on ajoute un nouveau temps caractéristique θ_i est définie par (3.59), comme dans l'exemple précédent (3.3.4 - Application 2)).

On étudie la fonction sur le domaine $[t_1, t_2] = [1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^3]$ et on se fixe 15 points de collocation p_s distribués logarithmiquement entre $1/t_2$ et $1/t_1$. La fonction de référence (3.49) est calculée par intégration numérique. La figure 3.18 montre l'évolution de l'erreur quadratique χ^2 minimisée (3.36) et les erreurs relatives E_p (3.37) et E_t (3.38) en fonction du nombre de temps caractéristiques θ_i optimisés. On remarque une décroissance exponentielle des trois erreurs jusqu'à 4 temps caractéristiques θ_i . La vitesse de décroissance est réduite par la suite, surtout pour la courbe représentant l'erreur relative sur l'espace réel. On atteint ainsi une approximation optimale avec 4 ou 5 temps caractéristiques dans cet exemple.

La figure 3.19 trace l'erreur quadratique χ^2 en fonction du dernier temps caractéristique θ_i ajouté, les temps caractéristiques précédents étant optimisés en chaque point des courbes. On remarque que χ^2 est minimale à l'intérieur du support du spectre de relaxation pour les premiers temps caractéristiques ajoutés. Cette erreur devient par la suite très petite jusqu'à être inexploitable pour l'algorithme d'optimisation. C'est ce qui explique la diminution de la vitesse de décroissance de l'erreur quadratique à la figure 3.18.

Les applications présentées à la présente section pour évaluer l'apport de l'optimisation des temps caractéristiques montrent que dans le cas général, l'erreur quadratique optimisée décroît

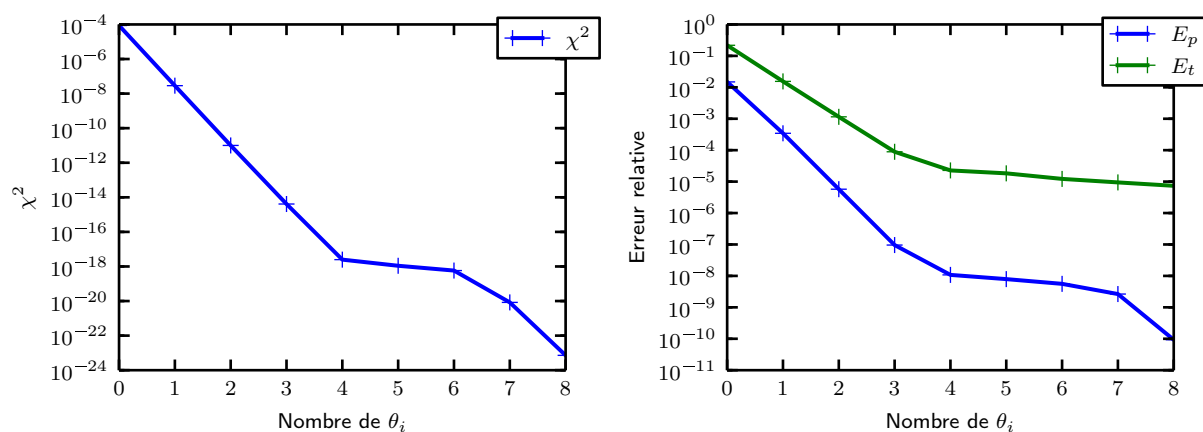


FIGURE 3.18 – Erreur quadratique (gauche) et erreurs relatives E_p et E_t en fonction du nombre de termes dans la somme de Prony.

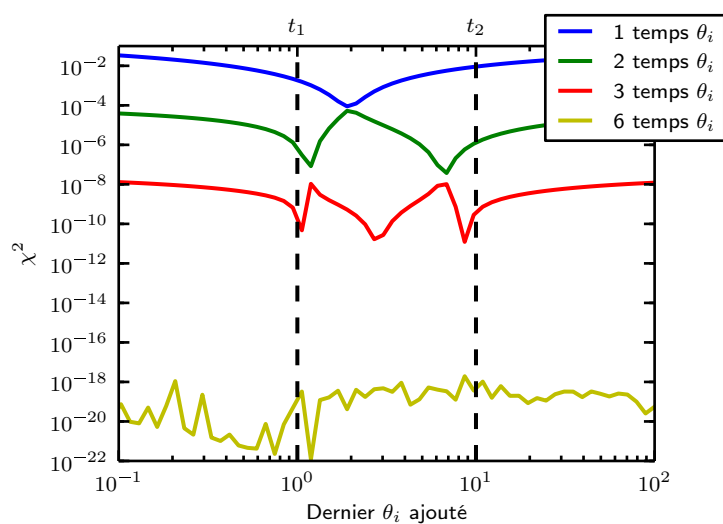


FIGURE 3.19 – Erreur quadratique χ^2 d'une approximation à 1, 2, 3 et 6 temps caractéristiques. Les courbes sont tracées en fonction du dernier temps caractéristique ajouté. Les lignes verticales en pointillé délimitent le spectre continu.

vite avec le nombre de temps caractéristiques et devient très sensible aux erreurs de virgule flottante. Il est ainsi difficile de trouver les temps caractéristiques physiques du modèle. Néanmoins, l'optimisation des temps caractéristiques permet dans tous les cas d'améliorer la qualité de l'approximation et conduit à des précisions correctes avec moins d'effort numérique (moins de temps caractéristiques θ_i et moins de points de collocation p_s) que l'application classique de la méthode.

3.3.5 Réalité physique des temps de collocation

Les figures 3.17 et 3.18 permettent de déterminer le nombre de temps caractéristiques θ_i nécessaires à atteindre une précision donnée. L'apparition des minimas locaux sur la courbe de l'erreur χ^2 empêche de trouver tous les temps caractéristiques physiques. On retrouve néanmoins l'ordre de grandeur de ces temps. Ainsi, les temps caractéristiques θ_i n'ont pas forcément une interprétation physique. Il s'avère alors inutile de considérer beaucoup de temps caractéristiques. Pour les exemples de l'évaluation de la méthode de collocation optimisée (§ 3.3.4), on peut s'arrêter par exemple à 5 temps caractéristiques θ_i pour avoir une erreur relative de l'ordre de 10^{-5} dans le domaine temporel, qui est au moins aussi bonne que celle de l'algorithme de Stehfest.

La présentation qu'on a faite à la méthode de collocation était dans le cas général où il n'y a pas de restriction sur les coefficients f_i des exponentielles décroissantes de l'approximation (3.21). Pour le cas de référence 3.3.1.2 par exemple, on a étudié la fonction de fluage longitudinal $f(t)$ (3.48) qui est égale à une combinaison linéaire des composantes sphérique et déviatorique de la fonction de retard \mathbb{F} :

$$F_{3333}^* = f^*(p) = \frac{1}{9K_{\text{hom}}^*(p)} + \frac{1}{3G_{\text{hom}}^*(p)} \quad (3.60)$$

où $1/(3K_{\text{hom}}^*)$ et $1/(2G_{\text{hom}}^*)$ sont respectivement les transformées de Laplace–Carson des composantes sphérique et déviatorique de \mathbb{F} . On sait que les coefficients des exponentielles décroissantes pour les deux composantes prises à part sont négatifs. Ainsi, la fonction $f(t)$ a tous ces coefficients qui sont négatifs.

La fonction de fluage transversal est :

$$F_{2233}^* = \frac{1}{9K_{\text{hom}}^*(p)} - \frac{1}{6G_{\text{hom}}^*(p)} \quad (3.61)$$

On note bien la présence de coefficients des exponentielles décroissantes de signes différents pour cette dernière fonction. Il n'y a pas de restriction à imposer aux coefficients f_i si on applique la méthode de collocation à cette dernière fonction.

Remarque. La démarche naturelle serait bien évidemment de traiter à part les composantes sphérique et déviatorique. L'exemple de la fonction de fluage longitudinal est considéré dans le but d'avoir une référence avec plusieurs temps caractéristiques.

Quand on connaît le signe des coefficients des termes de la somme de Prony (pour les fonctions $K_{\text{hom}}^*(p)$ et $G_{\text{hom}}^*(p)$ et leurs inverses par exemple), on peut considérer une minimisation sous contrainte de positivité ou de négativité de ces coefficients. L'approximation devient ainsi

acceptable de point de vue thermodynamique parce qu'on remarque que l'expression (3.21) n'est en fait que la fonction de relaxation d'un modèle de Maxwell généralisé de temps caractéristiques θ_i . La méthode de collocation consiste alors tout simplement à approximer la fonction de relaxation par celle d'un modèle de Maxwell généralisé.

3.3.6 Isolation de la composante transitoire d'une fonction viscoélastique

Dans l'introduction de la méthode de collocation, on a noté que rigoureusement, le calcul est effectué sur la partie transitoire d'un comportement viscoélastique linéaire sans vieillissement, qui doit être isolée. La fonction de relaxation peut directement être approchée par une somme de Prony comme le montre l'équation (3.23). Dans ce qui suit, nous présentons des techniques pour isoler la partie transitoire d'une fonction de fluage dans le cas où le comportement est décrit par un spectre de fluage ou de relaxation discret.

3.3.6.1 Calcul semi-analytique

Nous nous mettons dans le cas où la composante transitoire de la fonction est définie par un spectre discret (\mathbb{J}^s est une somme de distributions de Dirac (3.23)). Il y a plusieurs problèmes qui entrent sous cette catégorie. Nous citons par exemple les comportements des composites constitués de matériaux de Maxwell et de Kelvin généralisés⁶ (dont le comportement de Burgers est un cas particulier) homogénéisés par le schéma dilué ou de Mori–Tanaka. Il y a également des méthodes basées sur ces approches semi-analytiques permettant d'approcher un comportement homogénéisé par le schéma auto-cohérent généralisé (Hoang-Duc *et al.*, 2013) ou de milieux périodiques (Hoang-Duc et Bonnet, 2012).

Fonction de fluage

La fonction de fluage (3.7) s'écrit d'une manière générale sous la forme suivante :

$$\mathbb{J}(t) = \mathbb{S}^e + t\mathbb{S}^v + \sum_{i=1}^N \mathbb{J}_i^s \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \quad (3.62)$$

Dans un tel cas, la transformée de Laplace–Carson de la fonction étudiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{J}^*(p) = \mathbb{S}^e + \frac{1}{p}\mathbb{S}^v + \sum_{i=1}^N \mathbb{J}_i^s - \sum_{i=1}^N \mathbb{J}_i^s \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}} \quad (3.63)$$

6. Le (2008) utilise cette approche semi-analytique dans le cas de ces modèles pour la détermination des temps caractéristiques de fluage et de relaxation. Il analyse également la position de ces temps caractéristiques les uns par rapport aux autres pour les composites constitués de ces matériaux.

Chaque coefficient $J_{\mathbf{k}}$, où \mathbf{k} représente un quadruplet d'indices⁷ pour les tenseurs d'ordre 4, peut ainsi être écrit sous forme d'une fraction rationnelle :

$$J_{\mathbf{k}}^* = S_{\mathbf{k}}^e + \frac{1}{p} S_{\mathbf{k}}^v + \sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}} - \sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}} \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}} = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{N+1} a_i p^i}{\sum_{i=0}^{N+1} b_i p^i} \quad (3.64)$$

Selon l'équation (3.64), il existe des $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tels que $Q(p)$ est divisible par $p + \frac{1}{\tau_i}$. Ainsi, tous les opposés des inverses des racines non nulles du polynôme $Q(p)$ sont des temps caractéristiques de fluage. Les coefficients a_i et b_i peuvent être calculés numériquement. Les temps caractéristiques τ_i sont donc calculés numériquement.

Remarque. À partir de l'équation (3.64), on peut remarquer que $Q(p)$ est divisible par p quand le coefficient $S_{\mathbf{k}}^v$ n'est pas nul, d'où $b_0 = 0$. Ainsi, 0 est l'une des racines du polynôme $Q(p)$. La présence de cette racine peut être interprétée par l'existence d'un temps caractéristique infini, responsable du comportement asymptotique.

Le terme constant $S_{\mathbf{k}}^e$ correspond à la réponse instantanée. Il est égal à la limite de $J_{\mathbf{k}}^*(p)$ quand p tend vers l'infini (théorème de limites (3.16)). Sa valeur est égale au rapport des termes dominants des deux polynômes $P(p)$ et $Q(p)$:

$$S_{\mathbf{k}}^e = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \quad (3.65)$$

Le coefficient asymptotique $S_{\mathbf{k}}^v$ peut être obtenu après avoir déterminé les temps caractéristiques τ_i par l'équation suivante :

$$S_{\mathbf{k}}^v = \frac{a_0}{b_{N+1}} \prod_{i=1}^N \tau_i \quad (3.66)$$

Il est également possible de déterminer le terme indépendant du temps $S_{\mathbf{k}}^e + \sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}}$ à partir des polynômes $P(p)$ et $Q(p)$. Ce dernier est donné par :

$$S_{\mathbf{k}}^e + \sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}} = \frac{a_1 - a_0 \sum_{i=1}^N \tau_i}{b_{N+1}} \prod_{i=1}^N \tau_i \quad (3.67)$$

Pour résumer, à partir de la fraction rationnelle $\frac{P(p)}{Q(p)}$, il est possible de déterminer $S_{\mathbf{k}}^e$, $\sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}}$, $S_{\mathbf{k}}^v$ et les temps caractéristiques τ_i . En d'autres termes, on peut déterminer $S^e + \sum_{i=1}^N J_i^s + t S^v$. Le calcul de l'inverse $\mathbb{J}(t)$ revient à déterminer les coefficients de la somme de Prony :

$$\sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}} e^{-\frac{t}{\tau_i}} = S_{\mathbf{k}}^e + \sum_{i=1}^N (J_i^s)_{\mathbf{k}} + t S_{\mathbf{k}}^v - J_{\mathbf{k}}(t) \quad (3.68)$$

La méthode de collocation peut être appliquée à ce stade avec des temps caractéristiques égaux aux temps physiques.

7. Il faut utiliser les symétries des tenseurs de comportement plutôt qu'un calcul coefficient par coefficient quand il y a la possibilité.

Fonction de relaxation

Il est important de noter ici la distinction entre les temps caractéristiques liés à la fonction de fluage $\mathbb{J}(t)$ et ceux liés à la fonction de relaxation $\mathbb{R}(t)$, dont la transformée de Laplace–Carson $\mathbb{R}^*(t)$ est l'inverse de $\mathbb{J}^*(t)$.

Remarque. Les temps caractéristiques de fluage et de relaxation ne sont pas complètement indépendants. Les travaux de Le (2008) montrent des exemples où l'ordre des temps caractéristiques des deux fonctions est connu⁸.

La fonction de relaxation (3.8) s'écrit dans le cas d'un spectre discret de la manière suivante :

$$\mathbb{R}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_i^s e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \mathbb{C}^\infty \quad (3.69)$$

Sa transformée de Laplace–Carson est :

$$\mathbb{R}^*(p) = \sum_{i=1}^N \mathbb{R}_i^s \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}} + \mathbb{C}^\infty \quad (3.70)$$

Les coefficients de la fonction $\mathbb{R}^*(p)$ peuvent être exprimés sous forme de fraction rationnelle :

$$R_{\mathbf{k}}^* = \sum_{i=1}^N (R_i^s)_{\mathbf{k}} \frac{p}{p + \frac{1}{\tau_i}} + C_{\mathbf{k}}^\infty = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i p^i}{\sum_{i=0}^N b_i p^i} \quad (3.71)$$

où \mathbf{k} représente un quadruplet d'indices⁷ du tenseur d'ordre 4. Les temps caractéristiques de relaxation sont les opposés des inverses des pôles de la fraction rationnelle $\frac{P(p)}{Q(p)}$.

La réponse instantanée $C_{\mathbf{k}}^\infty + \sum_{i=1}^N (R_i^s)_{\mathbf{k}}$ est égale à la limite de $R_{\mathbf{k}}^*(p)$ quand p tend vers l'infini (3.16). Sa valeur est égale au rapport des termes dominants des deux polynômes $P(p)$ et $Q(p)$:

$$R_{\mathbf{k}}(t=0) = C_{\mathbf{k}}^\infty + \sum_{i=1}^N (R_i^s)_{\mathbf{k}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{a_N}{b_N} \quad (3.72)$$

La constante à l'infini C^∞ est établie par la relation suivante :

$$C_{\mathbf{k}}^\infty = \frac{a_0}{b_N} \prod_{i=1}^N \tau_i \quad (3.73)$$

Cette constante est nulle si, et seulement si, la fonction de fluage n'a pas de terme asymptotique $\mathbb{S}^v = 0$ (3.9).

8. par exemple, chaque temps de relaxation τ_i^r peut être encadré par deux temps de fluage τ_{i-1}^f et τ_i^f dans le cas des modèles généralisés de Maxwell et Kelvin de matériaux homogènes. Pour les matériaux composites relatifs à ces modèles (homogénéisation de Mori–Tanaka), il est possible d'encadrer l'intervalle contenant les temps caractéristiques.

Application

Revenons à l'exemple du matériau à matrice de Burgers et inclusions élastiques homogénéisé par le schéma de Mori–Tanaka (3.3.1.2). Les temps caractéristiques peuvent être calculés indépendamment pour la partie sphérique et la partie déviatorique de la fonction de relaxation \mathbb{R}_{hom} et de fluage $\mathbb{F}_{\text{hom}} = \mathbb{R}_{\text{hom}}^{-1}$. On trouve pour la fonction de relaxation :

- 4 temps caractéristiques liés à la composante sphérique,
- 7 temps caractéristiques liés à la composante déviatorique.

Alors que les temps caractéristiques de fluage sont de :

- 3 temps caractéristiques liés à la composante sphérique,
- 6 temps caractéristiques liés à la composante déviatorique.

La figure 3.20 situe ces différents temps caractéristiques sur une échelle logarithmique.

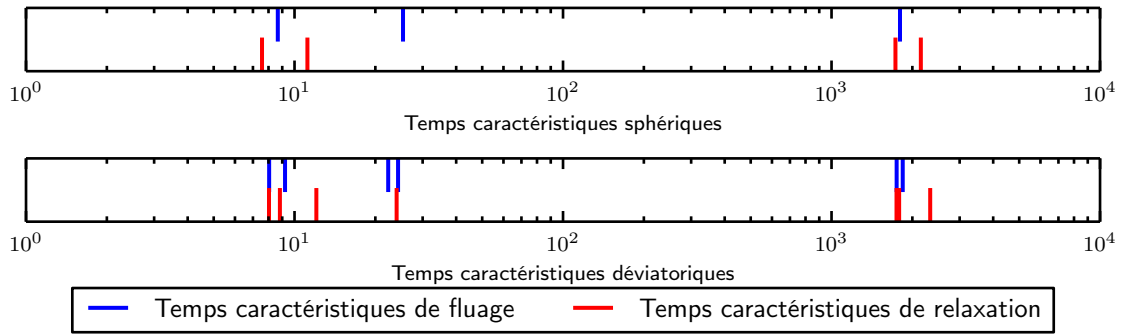


FIGURE 3.20 – Temps caractéristiques relatifs aux composantes sphériques et déviatoriques des fonctions de fluage et de relaxation.

Comme attendu pour cet exemple, on trouve un comportement non borné en fluage et une fonction de relaxation qui s'annule à l'infini pour les deux composantes sphérique et déviatorique et les réponses instantanées sont les inverses l'une de l'autre.

3.3.6.2 Calcul par moindres-carrés généralisés

On a vu que la méthode de Lévesque *et al.* (2007) utilise la technique des moindres carrés généralisés pour minimiser l'erreur χ^2 (3.29). La matrice du système, notée \mathbf{A} (3.28), permet de calculer les coefficients des exponentielles décroissantes qui minimisent cette erreur. Il est possible d'étendre la matrice \mathbf{A} pour prendre en compte des fonctions d'autres formes.

On considère l'expression générale d'une fonction de fluage (3.7). On peut distinguer sur cette expression un terme linéaire, un terme constant et un terme faisant intervenir le spectre de retard. Cette expression peut être approchée par la forme suivante :

$$A + tB + \sum_{i=1}^N g_i e^{-\frac{t}{\theta_i}} \quad (3.74)$$

telle que, quand le calcul peut être assimilé à celui d'un problème 1D⁹, pour la complaisance de fluage, les g_i sont négatifs et pour la fonction de relaxation, les g_i sont positifs et le terme asymptotique B est nul.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{p_s \theta_i}{1 + p_s \theta_i} & \frac{1}{p_s} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ B \\ A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

FIGURE 3.21 – Système de la méthode des moindres-carrés généralisée.

La figure 3.21 représente le système linéaire permettant d'optimiser les coefficients A , B et g_i .

La difficulté de cette méthode est qu'un choix forfaitaire des temps caractéristiques θ_i influence beaucoup les valeurs de A et B si on veut déterminer par un seul calcul la partie linéaire et la partie transitoire. L'interprétation physique des différents coefficients perd ainsi son sens physique car il peut résulter des valeurs aberrantes.

Néanmoins, cette technique peut être utilisée en deux temps. La première fois, pour calculer A et B et isoler la somme des exponentielles décroissantes, et la seconde fois, pour appliquer la méthode de collocation afin d'approcher uniquement la somme des exponentielles. Ainsi, il faut choisir des points de collocation p_s de manière à donner plus de poids à la contribution de la partie affine. Aux grands t , la contribution d'une exponentielle décroissante devient négligeable devant le terme $A + Bt$. La transformée de Laplace–Carson doit ainsi être évaluée pour des petites valeurs de p .

Dans le cas où p est très petit, on a $Bt \gg A \gg \sum_{i=1}^N g_i e^{-\frac{t}{\theta_i}}$. L'optimisation devient alors plus favorable pour le terme B . Nos tests montrent qu'il est possible de déterminer en un calcul une bonne approximation des coefficients A et B , à condition de choisir des points de collocation de manière à ce que le terme affine soit dominant par rapport à la somme d'exponentielles sans que les ordres de A et Bt soient très différents.

Application

9. Calcul uniquement sur la composante sphérique ou déviatorique d'un problème isotrope par exemple.

Pour illustrer cette technique, on revient à l'exemple du fluage longitudinal $f(t)$ d'un composite de matrice de Burgers avec des inclusions élastiques (§ 3.3.1.2). La fonction de fluage étudiée (3.48) est définie par une constante $A = C$, un coefficient asymptotique $B = T^{-1}$ et une combinaison linéaire de neuf exponentielles décroissantes. On se mettra dans l'hypothèse où le nombre de termes dans la somme des exponentielles n'est pas connu et on approximera la fonction $f(t)$ par la forme (3.74).

On choisit forfaitairement deux temps caractéristiques $\theta_1 = 10$ et $\theta_2 = 1000$ et 5 points de collocation distribués logarithmiquement entre 10^{-8} et 10^{-6} . Dans ce cas, le terme constant $A \approx 5 \times 10^{-2}$, qui n'est pas très loin des valeurs de $\frac{B}{p}$ entre 2.5×10^1 et 2.5×10^3 alors que les valeurs de la transformée de la somme des exponentielles sont entre 10^{-6} et 10^{-10} . Les points $(p_s, f^*(p_s))$ définissent alors une courbe presque linéaire, comme le montre la figure 3.22. Les

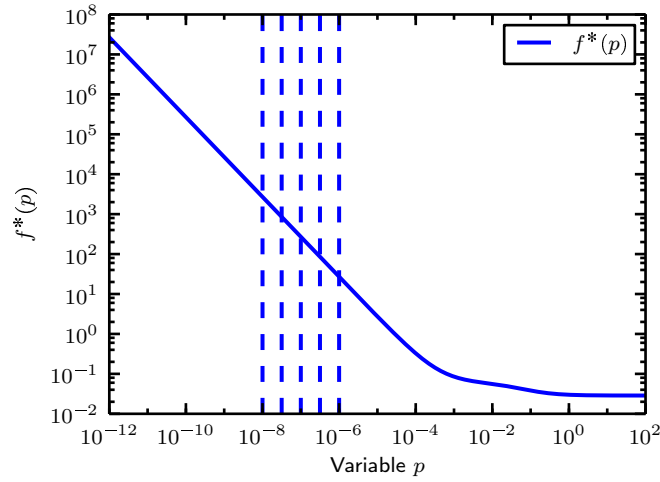


FIGURE 3.22 – Transformée de Laplace–Carson de la fonction $f(t)$ avec les points de collocation p_s utilisés pour déterminer les coefficients A et B .

résultats de cette application donnent des écarts relatifs sur les coefficients A et B de l'ordre de 10^{-9} et 10^{-13} respectivement.

Quand on choisit des points de collocation encore plus petits, il est possible d'améliorer la précision du coefficient B (jusqu'à atteindre la précision des doubles), mais on dégrade celle du coefficient A comme il devient négligeable par rapport à Bt .

Remarque. Il est ainsi possible de calculer a part le coefficient B avec une grande précision, puis calculer le coefficient A à partir de la fonction $f^*(p) - \frac{B}{p}$, et enfin calculer les coefficients g_i à partir de $f^*(p) - \frac{B}{p} - A$ comme on l'a vu pour la méthode de collocation. On rappelle qu'il faut soigner le calcul numérique de $f^*(p) - \frac{B}{p}$ car quand p est très petit, cette différence devient négligeable devant $\frac{B}{p}$ et on risque des erreurs de virgule flottante.

Pour les temps caractéristiques θ_i , leur choix n'est pas important du moment où ils assurent une faible contribution des exponentielles décroissantes pour des petites valeur de p . Il est parfois

possible de s'en passer, mais il est quand même conseillé de laisser quelques temps pour compenser le biais qu'amène la partie non linéaire de la fonction $f(t)$. Pour l'exemple qu'on a présenté, si l'on élimine les temps θ_i , on remarque la dégradation de la précision (en termes d'écart relatif) de A et B (qui devient respectivement de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-9}).

3.3.6.3 Calcul par théorème des valeurs aux limites

Par utilisation du théorème des valeurs aux limites (3.16), on peut déterminer la réponse instantanée de la fonction $\mathbb{J}(t)$ (3.62) comme suit :

$$\mathbb{J}(0) = \mathbb{S}^e = \lim_{p \rightarrow +\infty} f^*(p) \quad (3.75)$$

Le comportement asymptotique peut également être déterminé en appliquant le théorème des valeurs aux limites à la dérivée de la fonction de fluage :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\mathbb{J}}(t) = \mathbb{S}^v = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \mathbb{J}^* \quad (3.76)$$

Quant à la fonction de relaxation, le comportement asymptotique peut être déterminé en faisant tendre t vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{R}(t) = \mathbb{C}^\infty = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathbb{R}^* \quad (3.77)$$

La difficulté de cette méthode réside pour les fonctions qui ne sont pas connues analytiquement. Il n'est pas toujours possible de pouvoir estimer les limites à l'origine du temps et à l'infini par des calculs numériques. Il se trouve cependant que la plupart du temps, les limites recherchées soient atteintes, à une précision donnée, à des valeurs finies de p . Cela est illustré dans l'exemple ci-dessous :

Application

Considérons la fonction de fluage longitudinal $f(t)$ (3.48) d'un composite de matrice de Burgers avec des inclusions élastiques (§ 3.3.1.2).

La figure 3.23 représente la transformée de Laplace–Carson de la fonction f pour les grandes valeurs de p . On remarque que la fonction f^* atteint une constante à partir de $p = 10^6$. Cette constante atteinte est bien la valeur de la réponse instantanée.

Quant à la figure 3.24, elle représente la fonction $pf^*(p)$ (3.76) utilisée pour trouver le comportement asymptotique. Contrairement à la courbe de $f^*(p)$ aux grandes p , la fonction $pf^*(p)$ ne se stabilise pas aux faibles valeurs de p ($\frac{\Delta pf^*(p)}{pf^*(p)} \neq 0$). Mais l'écart relatif $|\frac{\Delta pf^*(p)}{pf^*(p)}|$ calculé entre deux points très rapprochés Δp reste inférieur à 10^{-8} (cet écart relatif est majoré par 10^{-8} pour différentes valeurs de Δp). Ainsi, on peut considérer que $pf^*(p)$ ait atteint la pente de l'asymptote à partir de $p = 10^{-10}$ avec une précision de 10^{-8} .

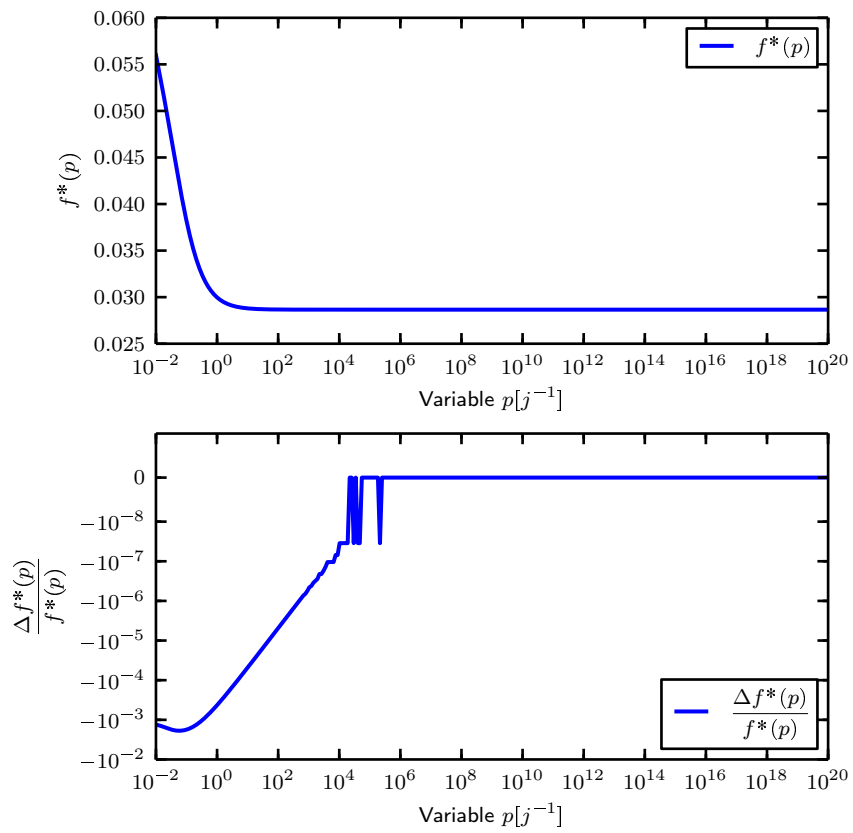


FIGURE 3.23 – Fonctions $f^*(p)$ et $\frac{\Delta f^*(p)}{f^*(p)}$ pour les grandes valeurs de p .

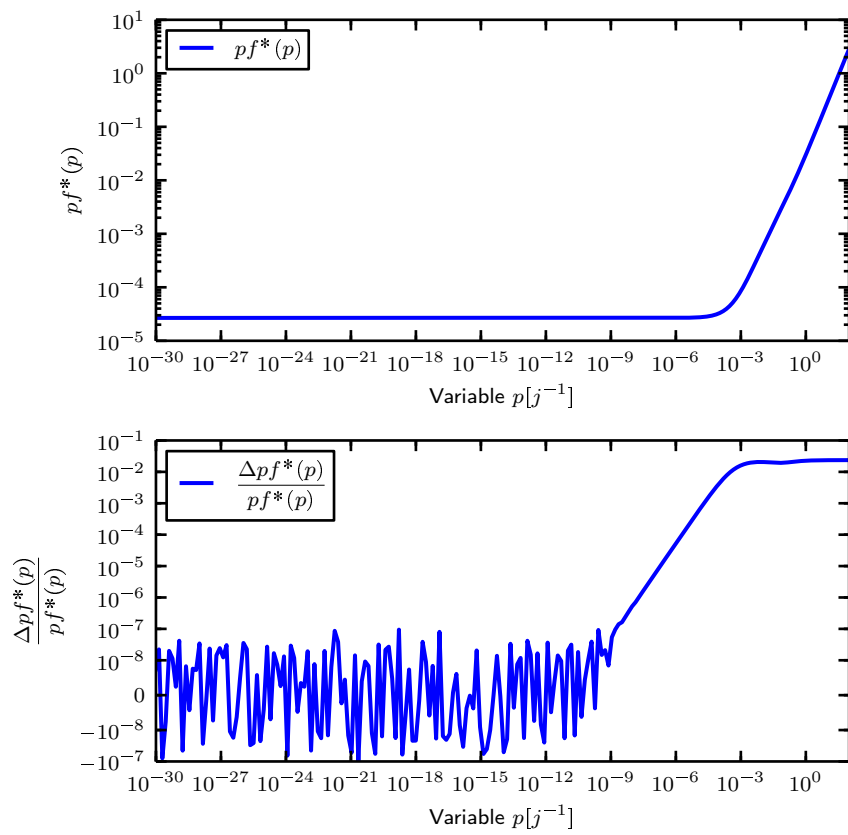


FIGURE 3.24 – Fonction $\dot{f}^*(p) = pf^*(p)$ (haut) et $\frac{\Delta pf^*(p)}{pf^*(p)}$ (bas) pour les faibles valeurs de p .

Finalement, nous avons pu déterminer le comportement à l'origine et la réponse instantanée en utilisant le théorème des valeurs aux limites. La méthode des moindres carrés généralisée a permis d'établir le coefficient de la composante asymptotique avec une meilleure précision. Il est ainsi nécessaire d'accorder une attention au calcul numérique de la fonction $pf^*(p)$ afin d'avoir une meilleure précision.

3.4 Homogénéisation numérique en viscoélasticité linéaire non-vieillissante par la méthode de l'inclusion équivalente

3.4.1 Principe du calcul

3.4.1.1 Calcul de base et confrontation aux éléments finis

Nous nous intéressons dans cette partie à l'application de la méthode de l'inclusion équivalente à un problème de viscoélasticité linéaire sans vieillissement. Nous présentons dans ce qui suit un exemple de base permettant d'étudier l'effet d'une inclusion sur une autre. Les résultats de la méthode de l'inclusion équivalente pour cet exemple seront confrontés à des calculs aux éléments finis (Nous utilisons le `Code_Aster` pour les calculs aux éléments finis).

Le problème considéré consiste en deux inclusions sphériques de même matériau élastique isotrope, plongées dans une matrice isotrope (élastique ou viscoélastique). Cette microstructure n'est pas représentative d'un milieu aléatoire. Ainsi, on ne pourra pas parler de comportement effectif. Néanmoins, la méthode de l'inclusion équivalente permet d'estimer les déformations moyennes dans les inclusions, ce qui peut constituer un élément de comparaison.

Le comportement viscoélastique de Burgers est pris en charge par la loi de comportement `BETON_BURGER_FP` dans le code éléments-finis. Afin de valider les paramètres de calcul aux éléments finis pour cette loi de comportement, on commence par calculer un cas de référence : barre de comportement viscoélastique linéaire non vieillissant sous traction simple, dont la solution analytique est connue.

Validation du modèle de Burgers aux éléments finis

La mise en traction simple d'un matériau homogène est une application de base qui permet de s'assurer des différents paramètres de calcul et en particulier de ceux utilisés pour adapter le comportement `BETON_BURGER_FP` aux besoins de cet exemple. Les fonctions de fluage ou de relaxation, étant connues analytiquement, elles peuvent être confrontées aux résultats d'un calcul aux éléments finis. La figure 3.25 présente les résultats du calcul pour une expérience de fluage pour les données numériques suivantes :

- temps caractéristiques : $\tau_{sM} = 33.3s$, $\tau_{sK} = 0.167s$, $\tau_{dM} = 50.0s$, $\tau_{dK} = 0.417s$,
- partie sphérique : $k_K = 2k_M$, $\eta_{sM} = \tau_{sM}k_M$, $\eta_{sK} = \tau_{sK}k_K$,
- partie déviatorique : $\mu_K = 1.2\mu_M$, $\eta_{dM} = \tau_{dM}\mu_M$, $\eta_{dK} = \tau_{dK}\mu_K$.

3.4. HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE EN VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE NON-VIEILLISSANTE PAR

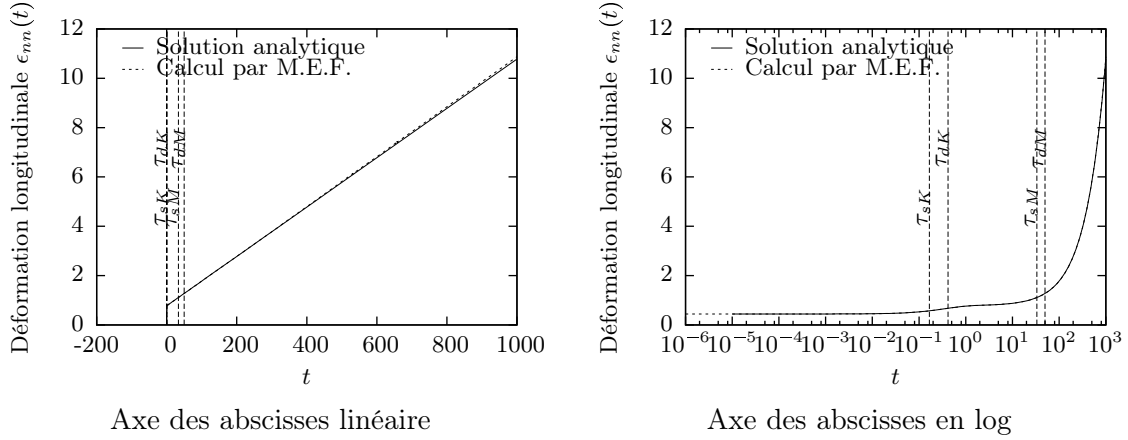


FIGURE 3.25 – Déformation longitudinale d’une barre homogène, constituée d’un matériau de Burgers en traction sous contrainte uniaxiale - Calcul éléments-finis et solution analytique.

Le calcul aux éléments finis réalisé par pas de temps correspond bien à la solution analytique de référence. (Les résultats ont été comparés également pour la déformation transversale qui décroît dans le temps et pour l’expérience de relaxation.)

Calcul en viscoélasticité linéaire sans vieillissement

Nous présentons dans ce qui suit une application qui permet de quantifier l’effet d’une inclusion sur une autre. La géométrie du problème, comme évoquée précédemment, se compose de deux inclusions sphériques de rayons a_1 et a_2 , situées sur l’axe \underline{e}_3 aux distances respectives r_1 et r_2 . Le domaine étudié est supposé infini.

Pour les calculs aux éléments finis, le domaine infini est remplacé par un domaine fini très grand par rapport aux inclusions (sphère de rayon $R \gg a_1 + a_2$).

Pour l’application numérique, on prend : $a_1 = a_2 = R/40$. La distance r entre les inclusions est variable. On note $\bar{r} = r/(a_1 + a_2)$.

Les données numériques proviennent de la thèse de Nguyen (2010) :

- Matrice : $k_M = 24.42 GPa$, $k_K = 39.27 GPa$, $\eta_{sM} = 22.0 \times 10^8 GPa.s$, $\eta_{sK} = 15.2 \times 10^7 GPa.s$, $\mu_M = 13.27 GPa$, $\mu_K = 14.07 GPa$, $\eta_{dM} = 7.75 \times 10^8 GPa.s$, $\eta_{dK} = 2.54 \times 10^7 GPa.s$
- Inclusions : $k_i = 100k_M$, $\mu_i = 100\mu_M$

Le calcul aux éléments finis est effectué par pas de temps. Un maillage 2D axi-symétrique a été utilisé. Il est raffiné au voisinage de l’inclusion (6 éléments par diamètre) et grossier près du bord. Vue la simplicité de la géométrie, la moyenne de la déformation dans les inclusions, estimée par la méthode de l’inclusion équivalente, est connue analytiquement. L’inversion de la transformée de Laplace–Carson est réalisée par le biais de la méthode de collocation.

La figure 3.27 représente une expérience de relaxation sous déplacement macroscopique $\underline{E} = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ imposé au bord dans la direction \underline{e}_3 . Les calculs sont effectués pour plusieurs valeurs

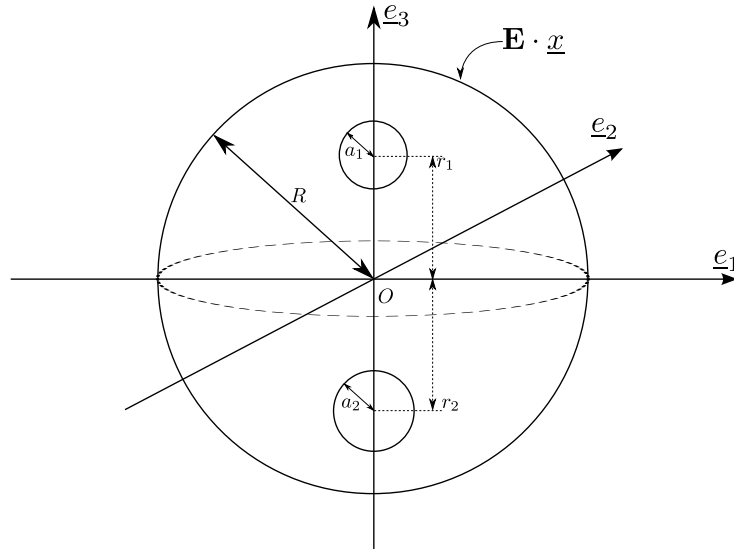


FIGURE 3.26 – Deux inclusions plongées dans une matrice sphérique ($R \gg a_1 + a_2$).

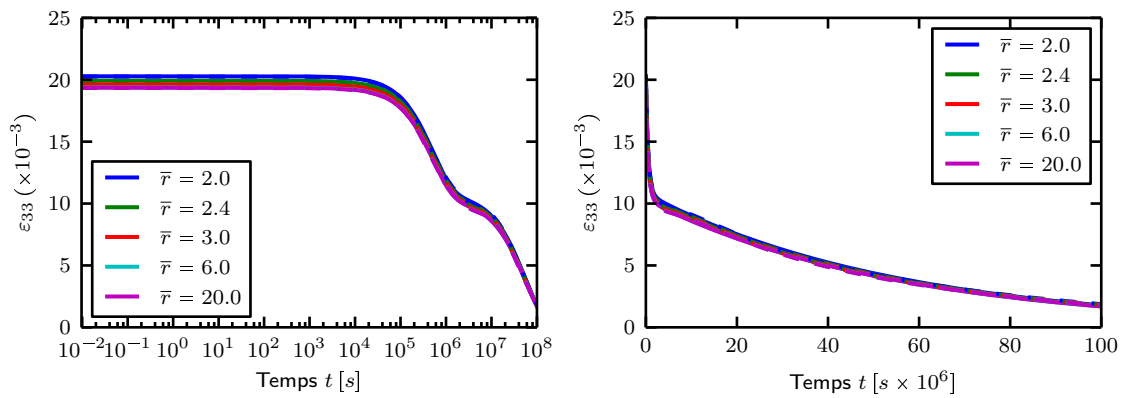


FIGURE 3.27 – Expérience de relaxation - Comparaison de la méthode de l'inclusion équivalente (ligne continue) à un calcul par éléments finis (lignes en pointillé) sous sollicitation déviatorique.

3.4. HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE EN VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE NON-VIEILLISSANTE PAR

de distance entre inclusions ($r/(a_1 + a_2) = 2.0, 2.4, 3.0, 6.0, 20.0$). Le diamètre d'une inclusion est petit devant celui de la matrice et est subdivisé en 6 éléments. Nous nous intéressons à la déformation moyenne dans les inclusions ϵ_{33} . L'erreur relative est présentée à la figure 3.28.

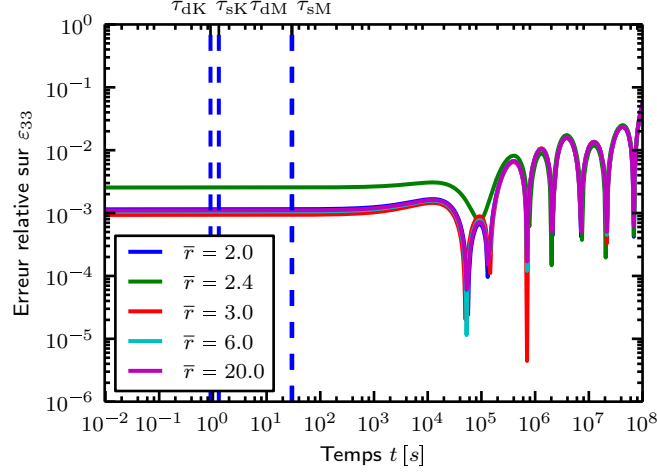


FIGURE 3.28 – Erreur relative de l'expérience de relaxation - Comparaison de la méthode de l'inclusion équivalente à un calcul aux éléments finis.

Le résultat de la méthode de l'inclusion équivalente correspond bien au calcul par éléments finis. On remarque également que la valeur de la déformation diminue avec l'augmentation de la distance entre les inclusions. Le début de la courbe correspond à la réponse instantanée (qui fait intervenir uniquement les modules élastiques de l'inclusion k_i et μ_i et les modules élastiques de la partie Maxwell du modèle k_M et μ_M).

Nous avons pu comparer un calcul viscoélastique avec deux approches différentes ; par pas de temps et par application de la transformée de Laplace–Carson. Le calcul aux éléments-finis confirme bien les estimations obtenues par la méthode de l'inclusion équivalente pour la visco-élasticité linéaire sans vieillissement.

3.4.1.2 Méthode de l'inclusion équivalente en viscoélasticité linéaire sans vieillissement

On a vu précédemment (§ 3.1.2) qu'un problème de viscoélasticité linéaire sans vieillissement peut être formulé dans l'espace de Laplace–Carson comme un problème d'élasticité linéaire (3.14), indexé par la variable de Laplace p . Toutes les méthodes d'homogénéisation formulées pour l'élasticité linéaire peuvent alors être appliquées dans cet espace.

L'équation de Lippmann–Schwinger (1.11) s'écrit dans l'espace de Laplace–Carson comme suit :

$$(\mathbb{R}^* - \mathbb{R}_0^*)^{-1} : \boldsymbol{\tau}^* + \mathbb{I}_0^* \otimes \boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{E}^* \quad (3.78)$$

La rigidité locale $\mathbb{C}(\underline{x})$ est alors remplacée par la transformée de la fonction de relaxation $\mathbb{R}^*(\underline{x}, p)$ et le milieu de référence \mathbb{C}_0 par $\mathbb{R}_0^*(p)$. Comme il n'y a pas de vieillissement, l'instant de chargement n'intervient pas. La déformation macroscopique \mathbf{E} peut alors être considérée constante à tout instant. Le tenseur de Green, dépendant du bord du domaine Ω et du milieu de référence \mathbb{R}^* , devient lui aussi dépendant de p .

Pratiquement, la rigidité de référence utilisée pour la méthode de l'inclusion équivalente est celle de la matrice qui est, pour les matériaux qui nous intéressent, l'élément responsable du fluage. L'application de la méthode de l'inclusion équivalente dans l'espace de Laplace–Carson nécessite ainsi la définition d'un nouveau milieu de référence pour chaque point p . Cela revient à recalculer pour chaque point p et chaque paire d'inclusions α et β le tenseur d'influence $\mathbb{T}_{\alpha\beta}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, p)$.

Contrairement à l'élasticité linéaire, le contraste entre le milieu de référence et les matériaux peut être très grand (surtout pour les faibles valeurs de p quand on a des inclusions plus rigides que la matrice). Ainsi, le principe de Hashin et Shtrikman risque de ne pas s'appliquer pour tous les points p de calcul.

3.4.2 Implémentation

L'utilisation de la méthode de l'inclusion équivalente dans l'espace de Laplace–Carson consiste à résoudre, pour un certain nombre de points p , le système linéaire (1.39) défini comme suit dans l'espace de Laplace–Carson :

$$\begin{aligned} & v_\alpha \left((\mathbb{R}_\alpha^*(p) - \mathbb{R}_0^*(p))^{-1} + \mathbb{P}_\alpha^*(p) - \frac{v_\alpha}{V} \mathbb{P}_\Omega^*(p) \right) : \boldsymbol{\tau}_\alpha^*(p) \\ & + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \left(\mathbb{T}_{\alpha\beta}^*(\underline{x}_\beta - \underline{x}_\alpha, p) - \frac{v_\alpha v_\beta}{V} \mathbb{P}_\Omega^*(p) \right) : \boldsymbol{\tau}_\beta^*(p) = v_\alpha \mathbf{E}^* \end{aligned} \quad (3.79)$$

Il est clair que la difficulté calculatoire réside dans la détermination des tenseurs d'influence, surtout quand il s'agit d'inclusions ellipsoïdales.

L'équation (2.9) montre que le tenseur d'influence $\mathbb{T}_{\alpha\beta}$ peut être écrit à l'aide des deux tenseurs $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$ (d'ordre 2) et $\mathbb{Q}_{\alpha\beta}$ (d'ordre 4). Ces deux derniers sont indépendants du matériau et ne dépendent que de la géométrie, comme le montrent les équations (2.10) et (2.11).

De même, si on revient à l'expression du développement multipolaire du tenseur d'influence (2.3) et aux expressions (2.6), on remarque que le matériau est découplé de la géométrie, ce qui permet d'écrire le développement sous forme d'une combinaison linéaire de grandeurs indépendantes du matériau.

D'une manière générale, le tenseur d'influence peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = a(\mu_0) \mathbb{A}_{\alpha\beta}(\underline{R}) + b(\mu_0, \nu_0) \mathbb{B}_{\alpha\beta}(\underline{R}) \quad (3.80)$$

3.5. APPLICATION : RELAXATION MACROSCOPIQUE DE MICROSTRUCTURES CONSTITUÉES D'IN

de sorte que a et b ne dépendent que des paramètres de matériau du milieu de référence et \mathbb{A} et \mathbb{B} ne dépendent que de la géométrie de la microstructure. La transformée de Laplace–Carson du tenseur d'influence d'un problème de viscoélasticité linéaire sans vieillissement s'écrit alors :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^*(\underline{R}, p) = a^*(p)\mathbb{A}_{\alpha\beta}(\underline{R}) + b^*(p)\mathbb{B}_{\alpha\beta}(\underline{R}) \quad (3.81)$$

Cette remarque est très importante. Elle signifie qu'il suffit d'assembler une seule fois deux matrices ne dépendant que de la géométrie du problème, dont la combinaison linéaire avec des coefficients dépendants du matériau permet d'obtenir la matrice du système (3.79). Ainsi, le coût de l'assemblage de la matrice du système en viscoélasticité linéaire sans vieillissement est presque réduit au coût de l'assemblage en élasticité linéaire.

Remarque. Comme le chargement \mathbf{E} est constant, le second membre est le même quelle que soit p .

Remarque. Comme la partie lourde d'un calcul avec la méthode de l'inclusion équivalente provient de la complexité de la géométrie et non du matériau, il est possible d'enregistrer pour chaque réalisation donnée les parties \mathbb{A} et \mathbb{B} indépendantes du matériau (3.80). Cela permettrait une utilisation plus facile pour des calculs ultérieurs. On note par ailleurs que ces calculs élémentaires peuvent être parallélisés.

3.5 Application : relaxation macroscopique de microstructures constituées d'inclusions ellipsoïdales

Dans ce qui suit, on présente une application où l'on utilise la méthode de l'inclusion équivalente pour évaluer la fonction de relaxation macroscopique de microstructures à inclusions ellipsoïdales monodisperses : on considère ainsi un ensemble de microstructures de forme sphérique, contenant des inclusions aplaties d'élancement $\rho = 1/3$. Deux cas seront étudiés :

- inclusions orientées aléatoirement (fig. 3.29 - gauche),
- inclusions parallèles (fig. 3.29 - droite).

La fraction volumique des inclusions est de l'ordre de 10.6% et le rapport du plus grand diamètre à celui du domaine est de 1/10 (les microstructures contiennent entre 314 et 320 inclusions). La matrice a un comportement viscoélastique linéaire non vieillissant (Burgers) et les inclusions sont élastiques linéaires de rigidité supérieure à celle de la matrice.

Le comportement homogénéisé sera calculé par une moyenne statistique sur 10 réalisations isotropes et pour une réalisation dont les inclusions sont parallèles. La microstructure à inclusions parallèles est considérée afin de mettre en évidence l'effet de l'anisotropie. Les résultats du calcul sont confrontés à l'estimation du schéma de Mori–Tanaka.

Pour l'application numérique, on considère les mêmes matériaux qu'à l'exemple (§ 3.3.1.2, tab. 3.3.1.2), et les modules élastiques des inclusions $k_i = 52.17\text{GPa}$ et $\mu_i = 28.35\text{GPa}$. Les temps seront présentés en jours (j) et les fonctions de relaxation en (GPa).

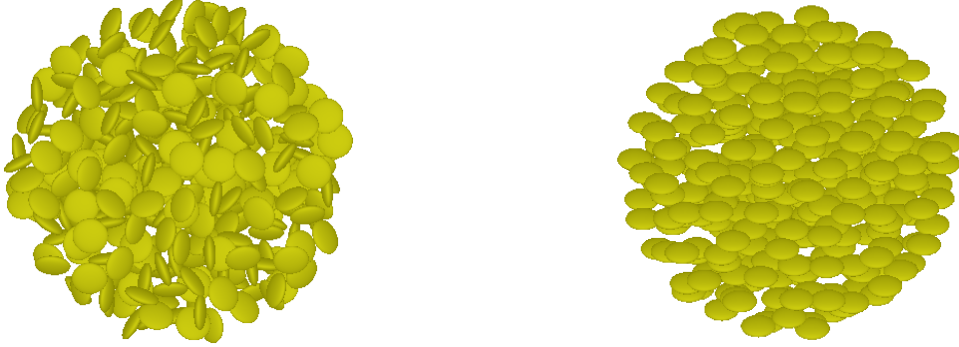


FIGURE 3.29 – Exemples des réalisations étudiées. À gauche, une microstructure avec une répartition isotrope de l’orientation des inclusions. À droite, la microstructure aux inclusions parallèles.

3.5.1 Microstructures isotropes

Nous présentons ici le calcul effectué sur 10 microstructures à inclusions ellipsoïdales dispersées et orientées aléatoirement. Les courbes des transformées de Laplace–Carson des fonctions de relaxation sphérique et déviatorique de la matrice (fig. 3.30) peuvent donner une idée sur le choix des points de collocation (où sera appliquée la méthode de l’inclusion équivalente). Ces

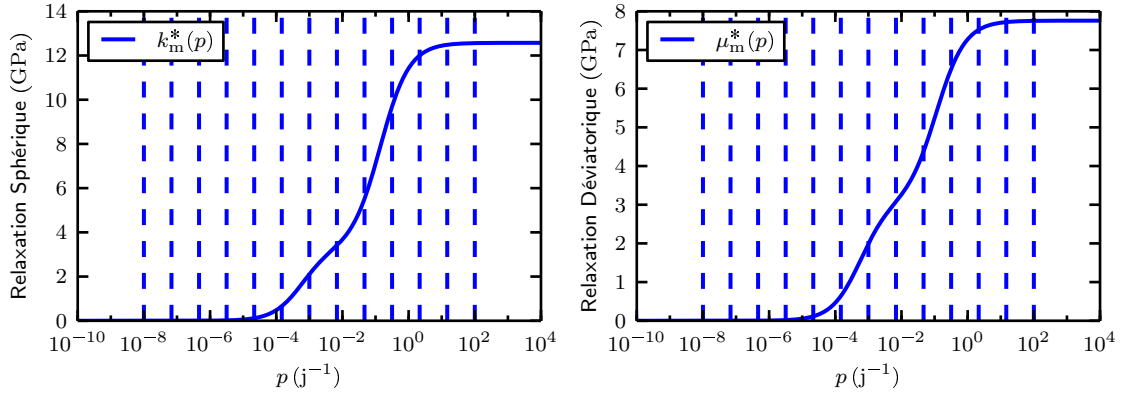


FIGURE 3.30 – Transformée de Laplace–Carson des composantes sphérique (gauche) et déviatorique (droite) de la fonction de relaxation de la matrice. Les lignes verticales correspondent aux points de collocation p_s choisis pour l’inversion de la transformée de Laplace–Carson.

points de collocation sont au nombre de 16, répartis logarithmiquement entre $10^{-8}j^{-1}$ et 10^2j^{-1} . Cette répartition permet de balayer un ensemble de contrastes permettant de décrire la fonction de relaxation.

L’application de la méthode de l’inclusion équivalente en chacun de ces points p_s permet d’obtenir, dans l’espace de Laplace–Carson, une estimation de la fonction de relaxation apparente

3.5. APPLICATION : RELAXATION MACROSCOPIQUE DE MICROSTRUCTURES CONSTITUÉES D'IN

$\mathbb{R}_{\text{app}}^*(p)$. On considère une distance de transition $r_0 = 4a$, où a est le rayon équatorial des ellipsoïdes. Vu la dispersion et l'orientation aléatoires des inclusions dans les microstructures, on peut s'attendre à un comportement isotrope (au moins statistiquement). En effet, l'écart à l'isotropie de $\mathbb{R}_{\text{app}}^*(p)$ est de l'ordre de 0.5% (écart relatif moyen sur toutes les réalisations et tous les points p_s) :

$$\frac{\|\mathbb{R}_{\text{app}}^* - (3k_{\text{app}}^* \mathbb{J} + 2\mu_{\text{app}}^* \mathbb{K})\|}{\|\mathbb{R}_{\text{app}}^*\|} \approx 0.5\% \quad (3.82)$$

où $3k_{\text{app}}^*(p_s)\mathbb{J} + 2\mu_{\text{app}}^*(p_s)\mathbb{K}$ est la projection de $\mathbb{R}_{\text{app}}^*(p_s)$ sur la base des tenseurs isotropes.

Remarque. On rappelle que les deux fonctions $k_{\text{app}}^*(p)$ et $\mu_{\text{app}}^*(p)$ n'ont pas la même signification que les modules sphérique et déviatorique d'une fonction élastique. On a considéré cette notation vu la similitude entre ces fonctions et les modules élastiques dans l'espace de Laplace–Carson.

On applique la méthode de collocation aux fonctions $k_{\text{app}}(t)$ et $\mu_{\text{app}}(t)$. On considère 9 temps caractéristiques θ_i entre $10^{-2}j$ et 10^8j , qui sont optimisés par la suite pour chacune des deux fonctions. Les fonctions $k_{\text{app}}(t)$ et $\mu_{\text{app}}(t)$ sont positives décroissantes, ce qui suggère une optimisation sous contrainte de positivité des coefficients des exponentielles décroissantes. L'optimisation donne des temps caractéristiques dominants autour de $7.2j$, $11.1j$, $1720j$ et $2170j$ pour la partie sphérique et $8.9j$, $11.8j$, $1790j$, $2250j$ pour la partie déviatorique, et ce, pour toutes les réalisations. Les coefficients des 5 autres temps restants sont relativement petits ou nuls.

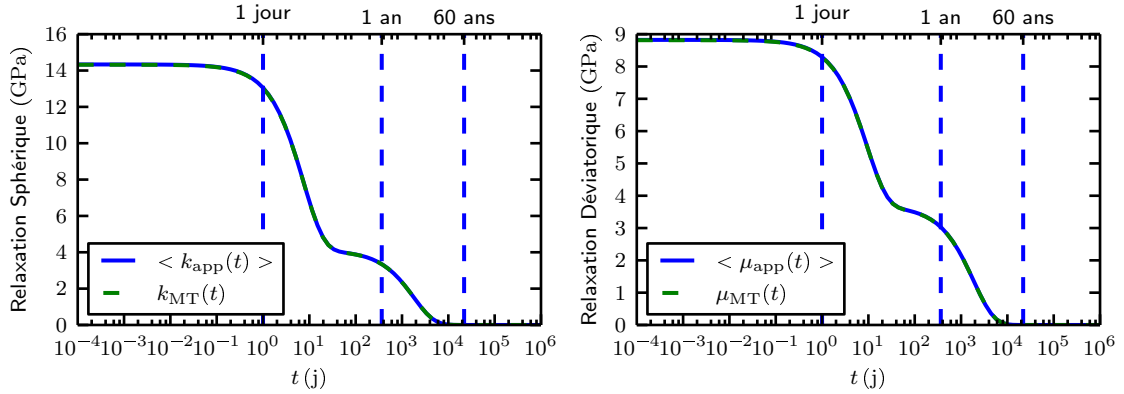


FIGURE 3.31 – Composantes sphérique (gauche) et déviatorique (droite) de la fonction de relaxation moyenne calculée par la méthode de l'inclusion équivalente et confrontation au schéma de Mori–Tanaka.

La figure 3.31 représente les fonctions de relaxation calculées par la méthode de l'inclusion équivalente dans le domaine temporel. Les courbes représentent les moyennes statistiques de ces fonctions sur l'ensemble des 10 réalisations. La dispersion est très faible ; l'écart type réduit est de l'ordre de 0.1% pour le début de la courbe (il augmente jusqu'à 1% après 30 an et avant que la moyenne s'annule). Cet écart réduit vient du fait que la fraction volumique des inclusions est

faible et les volumes élémentaires statistiques sont grands. On remarque généralement une plus grande dispersion quand les VES sont plus petits.

Pour la fraction volumique de cet exemple, le schéma de Mori–Tanaka est adapté à l'estimation du comportement macroscopique des microstructures. Ceci explique le faible écart entre le schéma de Mori–Tanaka et la méthode de l'inclusion équivalente.

La méthode de l'inclusion équivalente permet ainsi d'estimer fiablement le comportement macroscopique avec un calcul explicite sur l'ensemble des microstructures. Elle n'est appliquée qu'en 16 points de l'espace de Laplace–Carson, ce qui est faible par rapport à ce que demandent des méthodes numériques d'inversion autres que la méthode de collocation. La minimisation sous contrainte nous a assuré l'obtention de fonctions positives et décroissantes. Cela est conseillé quand on connaît la monotonie des fonctions. Le calcul des tenseurs d'influence par intégration numérique est la partie du calcul qui prend le plus de temps, mais elle est à faire une seule fois pour tous les points de collocation. Le temps nécessaire à l'inversion du système est plus faible en général, mais peut devenir important quand il s'agit d'un grand nombre de points de collocation.

Complexité et temps de calcul

Comme vu au paragraphe 2.4.4, le calcul des tenseurs d'influence pour des inclusions ellipsoïdales nécessite de déterminer la «distance de transition» entre inclusions à partir de laquelle les tenseurs d'influence peuvent être approximés par leur développement multipolaire. Cette distance peut être déterminée par une étude exhaustive de l'erreur relative sur les tenseurs d'influence. L'étude de l'erreur relative est effectuée pour l'une des microstructures étudiées dans le présent exemple. Elle est calculée pour l'intégration numérique (raffinement d'icosaèdre de niveau 6, 81 920 points d'intégration) et pour le développement multipolaire d'ordre 2. La référence est calculée par intégration numérique au niveau 8 (1 310 720 points d'intégration).

La figure 3.32 représente les moyennes des erreurs relatives en fonction des distances entre inclusions relativement à un calcul élastique. L'intersection de la courbe relative à l'intégration numérique avec celle relative au développement multipolaire donne un ordre de grandeur de la distance de transition. Dans le présent exemple, une distance égale à $6a$ (où a est le grand rayon d'un ellipsoïde) permettrait d'avoir une erreur relative moyenne de l'ordre de 0.5%. En comparant les figures 2.8 et 3.32, on constate que lorsque les inclusions sont moins élancées, la précision du calcul des tenseurs d'influence est améliorée. En revanche, la distance de transition n'est que peu affectée. On peut assurer une erreur relative moyenne de l'ordre de 1% (qui est l'erreur relative maximale obtenue pour l'exemple du paragraphe 2.4.4 où les inclusions sont plus aplaties) si on prend une distance de transition égale à $4a$. C'est cette dernière valeur qui est retenue pour la suite du calcul.

Remarque. La courbe relative au développement multipolaire est décroissante. Son accroissement remarqué sur la figure 3.32 s'explique par la dégradation de la précision de la référence pour les grandes distances R/a .

Remarque. Le temps cumulé de calcul des tenseurs d'influence par intégration numérique¹⁰ (raf-

10. Le temps moyen de calcul d'un tenseur d'influence par intégration numérique (raffinement d'icosaèdre de niveau 6) est de 3.3 s.

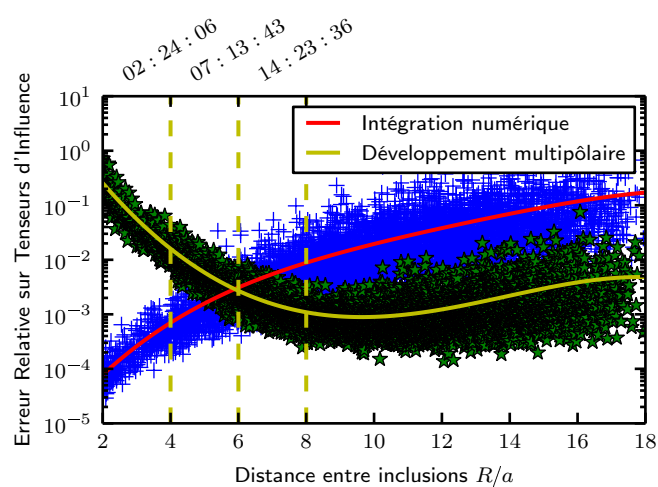


FIGURE 3.32 – Erreur relative sur les tenseurs d'influence calculés par intégration numérique (raffinement d'icosaèdre de niveau 6) et par développement multipolaire d'ordre 2. La référence est calculée par intégration numérique de raffinement de niveau 8. Les nuages de points correspondent aux valeurs réelles des erreurs relatives sur les tenseurs d'influence. Les abscisses supérieures donnent les durées nécessaires au calcul par intégration numérique (raffinement d'ordre 6) des tenseurs d'influence pour les distances de transition $4a$, $6a$ et $8a$.

finement d'icosaèdre d'intégration d'ordre 6) pour une distance de transition égale à $4a$ est de l'ordre de 2h30 et il est de l'ordre de 7h15 pour une distance de transition égale à $6a$. Ces durées sont estimées pour un calcul séquentiel en langage Python (CPU 2.40GHz). En pratique, les calculs sont parallélisés.

3.5.2 Microstructure anisotrope

Pareillement à l'exemple précédent, on applique la méthode de l'inclusion équivalente à une microstructure dont les inclusions sont orientées parallèlement (fig. 3.29 - droite). On conserve les mêmes points de collocation p_s et la même distance de transition que l'exemple précédent. On s'attend à ce que la microstructure ait un comportement orthotrope dans la direction de l'orientation des inclusions \underline{d} (d'ailleurs, l'écart de la fonction de relaxation à sa projection sur la base isotrope (3.82) atteint 10%). Ainsi, les tenseurs de comportement sont projetés sur la base de Walpole (1984) qui convient à la décomposition des tenseurs orthotropes.

Remarque. On peut prédire le comportement isotrope ou orthotrope également à partir de la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman. Comme le montre la figure 3.33, pour une microstructure isotrope, la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman est égale pour les trois chargements uniaxiaux $\mathbf{E} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ (où $i \in \{1, 2, 3\}$) dans l'espace de Laplace–Carson, alors que la courbe relative au chargement $\mathbf{E} = \underline{d} \otimes \underline{d} = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ s'écarte des courbes relatives aux chargements qui lui sont orthogonaux pour la microstructure aux inclusions parallèles. Il peut ainsi être intéressant

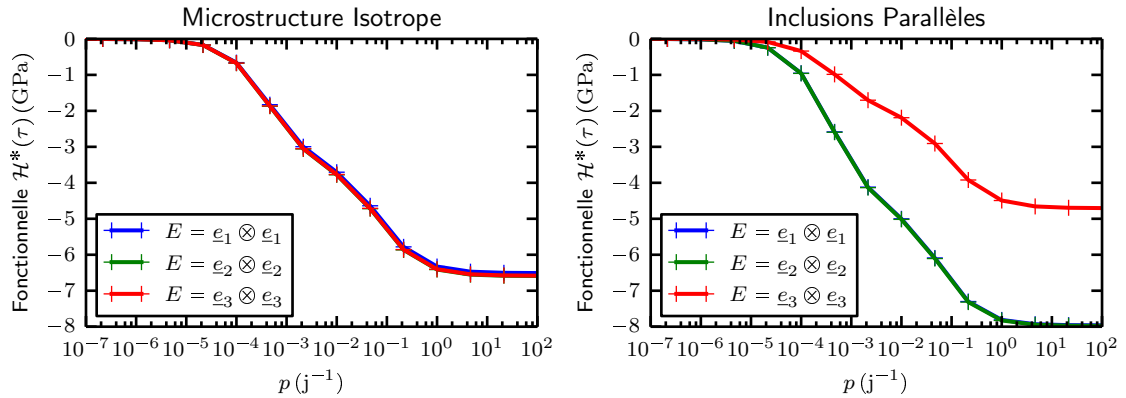


FIGURE 3.33 – Fonctionnelle de Hashin et Shtrikman $\mathcal{H}^*(\tau)$ relative à une réalisation isotrope (gauche) et à une réalisation à inclusions parallèles (droite) sous des chargements uniaxiaux. La fonctionnelle $\mathcal{H}^*(\tau)$ est évaluée aux points de collocation p_s .

d'observer la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman qui est une grandeur scalaire facilement obtenue pendant la résolution du système de la méthode de l'inclusion équivalente. Les mêmes remarques peuvent être déduites des chargements déviatoriques.

3.5. APPLICATION : RELAXATION MACROSCOPIQUE DE MICROSTRUCTURES CONSTITUÉES D'IN

En posant $\mathbf{p} = \underline{d} \otimes \underline{d}$ et $\mathbf{q} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{p}$, on note :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} & \mathbb{E}_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} & \mathbb{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} & \mathbb{E}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \\ \mathbb{F} &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} & \mathbb{G} &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.83)$$

les tenseurs définissant la base de Walpole (1984). La projection du tenseur de relaxation macroscopique $\mathbb{R}_{\text{app}}^*$ sur la base de Walpole donne un écart de l'ordre de 0.5% pour tous les points p_s :

$$\frac{\|\mathbb{R}_{\text{app}}^* - (a_{\text{app}}^* \mathbb{E}_1 + b_{\text{app}}^* \mathbb{E}_2 + c_{\text{app}}^* \mathbb{E}_3 + d_{\text{app}}^* \mathbb{E}_4 + f_{\text{app}}^* \mathbb{F} + g_{\text{app}}^* \mathbb{G})\|}{\|\mathbb{R}_{\text{app}}^*\|} \approx 0.5\% \quad (3.84)$$

où $(a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*)$ est la décomposition du tenseur de relaxation $\mathbb{R}_{\text{app}}^*$ dans la base de Walpole $(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3, \mathbb{E}_4, \mathbb{F}, \mathbb{G})$.

On inverse par la méthode de collocation, de la même manière que l'exemple précédent, les différentes composantes de Walpole du tenseur de relaxation. La figure 3.34 compare, dans le domaine temporel, les résultats de la méthode de l'inclusion équivalente au schéma de Mori-Tanaka dont la phase inclusionnaire est ellipsoïdale et orientée dans une seule direction \underline{d} . On remarque que le résultat du calcul est très proche des prévisions du schéma de Mori-Tanaka, ce qui permet de valider cette méthode pour la fraction volumique considérée où ce schéma est bien adapté.

La présente application a permis d'appliquer la méthode de collocation à des microstructures à inclusions ellipsoïdales dans le cadre de la viscoélasticité linéaire non vieillissante afin d'en estimer la fonction de relaxation macroscopique. Les microstructures étudiées sont de faible fraction volumique et les volumes élémentaires statistiques sont assez grands pour permettre une dispersion très faible des résultats. Dans le cadre de cette étude, l'ordre de grandeur de la fraction volumique des inclusions et la régularité de leurs distributions nous ont permis de comparer les résultats obtenus aux prévisions du schéma de Mori-Tanaka. Néanmoins, alors que la méthode de l'inclusion équivalente permet toujours d'obtenir des tenseurs symétriques de comportement macroscopique, cette symétrie est mise en défaut dans certains cas pour le schéma de Mori-Tanaka comme le montrent les travaux de Ferrari (1991). La méthode de l'inclusion équivalente commence à se distinguer des schémas classiques d'homogénéisation notamment pour des fractions volumiques élevées ou des distributions particulières d'inclusions, auquel cas, le détail des microstructures a un impact plus important. Elle a en plus l'avantage de permettre des calculs locaux, comme on l'a présenté aux chapitres précédents.

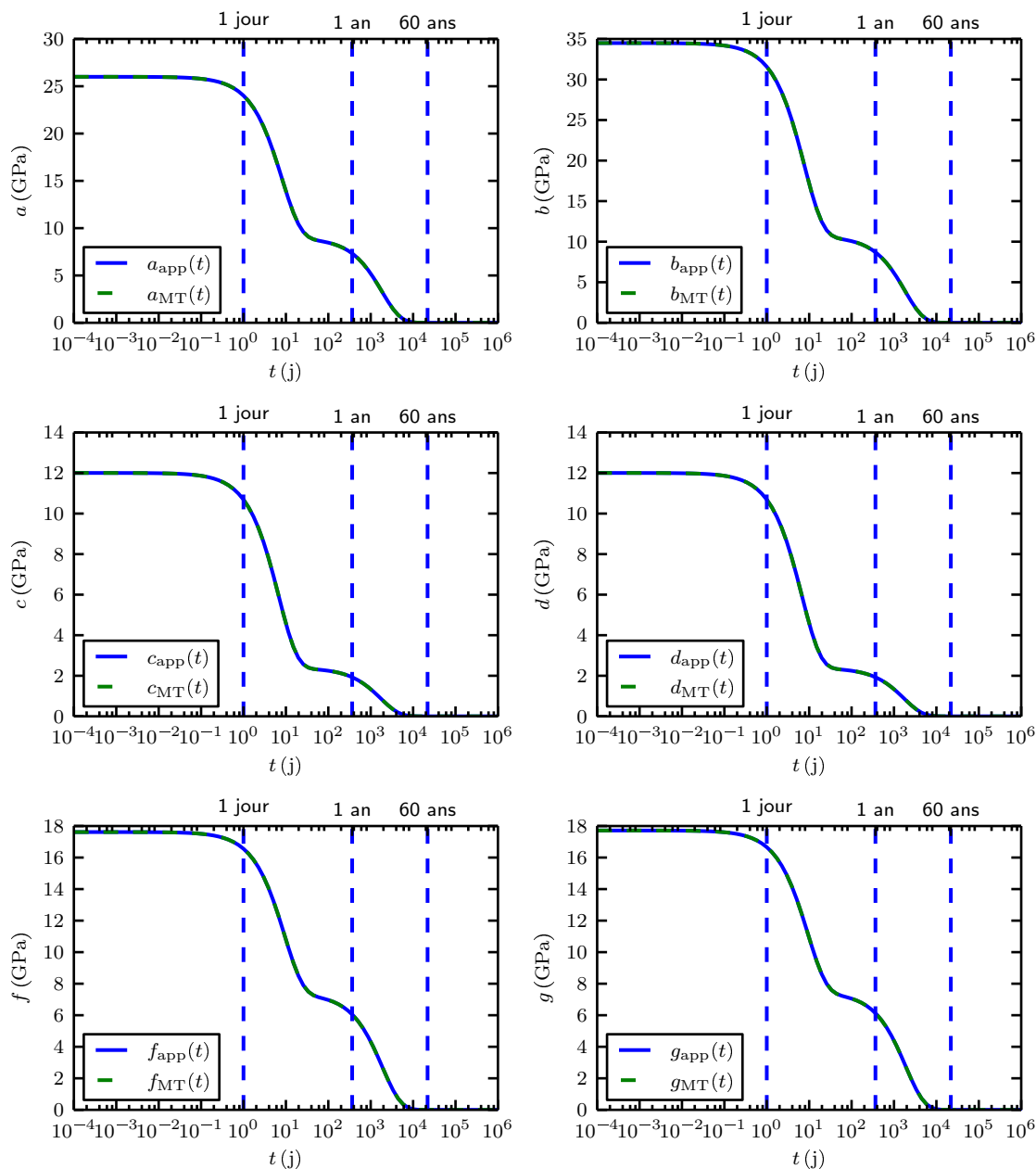


FIGURE 3.34 – Composantes dans la base de Walpole de la fonction de relaxation d’une microstructure à inclusions parallèles calculée par la méthode de l’inclusion équivalente et confrontation au schéma de Mori–Tanaka.

3.5. APPLICATION : RELAXATION MACROSCOPIQUE DE MICROSTRUCTURES CONSTITUÉES D'IN

Sous certaines conditions sur l'âge des matériaux cimentaires, le comportement peut être modélisé par de la viscoélasticité linéaire sans vieillissement. Les modèles rhéologiques de ce type peuvent être calculés dans l'espace de Laplace–Carson en utilisant les techniques établies dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'inversion des résultats établis dans l'espace de Laplace–Carson s'appuie en pratique sur des méthodes numériques.

La méthode de l'inclusion équivalente permet de faire des calculs en des points discrets de l'espace de Laplace–Carson.

Les techniques d'inversion, utilisant les résultats de la transformée en ces points discrets, peuvent être adaptées à cette méthode d'homogénéisation.

Comme l'application de la méthode de l'inclusion équivalente reste relativement lourde par rapport à des schémas d'homogénéisation classiques, nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux méthodes d'inversion ne nécessitant qu'un nombre limité d'évaluations dans l'espace de Laplace–Carson. En particulier, la méthode de collocation a retenu notre attention ; il s'agit d'une méthode qui consiste à approximer le comportement recherché par celui d'un matériau de Maxwell généralisé. La position des points de collocation (où la transformée est évaluée) doit par contre être choisie soigneusement de façon à donner une information suffisante pour décrire la totalité de la transformée.

En utilisant la formulation de Lévesque *et al.* pour la méthode de collocation, on remarque qu'il est possible d'optimiser les temps caractéristiques de l'approximation par le modèle de Maxwell généralisé sans avoir besoin de calculs supplémentaires dans l'espace de Laplace–Carson. Cela représente un grand avantage pour la méthode d'homogénéisation utilisée.

On remarque également que la matrice du système issu de la méthode de l'inclusion équivalente peut être scindée en deux matrices indépendantes des matériaux et s'appuyant uniquement sur les données géométriques. De ce fait, le coût des opérations d'assemblage dans l'espace de Laplace–Carson est réduit et devient du même ordre que pour un problème d'élasticité linéaire.

Conclusion et perspectives

Conclusion

La méthode de l'inclusion équivalente, utilisée dans le présent travail dans sa forme variationnelle, permet de calculer des microstructures hétérogènes de type matrice-inclusions (matrice : mortier ou pâte de ciment ; inclusions : granulats, pores, etc...) représentant de façon idéalisée les matériaux cimentaires. Cette méthode, du point de vue de la complexité géométrique des microstructures, de leur discrétisation et du coût de calcul, se situe entre les méthodes en champs complets et les méthodes en champs moyens. Elle a été initialement établie dans sa forme variationnelle dans le cadre de l'élasticité linéaire et utilisée en pratique pour le calcul de microstructures à inclusions sphériques. Pareillement à la méthode des éléments finis qui peut être enrichie en utilisant des éléments quadratiques par exemple, la méthode de l'inclusion équivalente peut être améliorée en enrichissant la forme des champs à l'intérieur des inclusions. Ce point important fit partie de travaux antérieurs à ce mémoire (Brisard *et al.*, 2014) qui ont proposé des champs locaux de forme polynômiale, telle que la précision de la méthode augmente avec le degré de ces polynômes. Le présent travail s'est intéressé à l'enrichissement de cette méthode sur deux autres volets :

- la géométrie : extension de la méthode à des inclusions ellipsoïdales,
- le comportement : extension de la méthode à la viscoélasticité linéaire sans vieillissement, nous permettant ainsi de prendre en compte le fluage de façon simplifiée.

Pour ces deux points, on s'est limité à des champs de polarisation constants par inclusion.

Contrairement aux schémas classiques basés sur le formalisme du tenseur d'Eshelby, les inclusions ne sont pas vues comme des phases, mais comme des zones géométriques explicites, définies par leurs positions, leurs orientations et leurs comportements locaux. Le système linéaire résultant de l'application de la méthode est constitué de :

- termes qui traduisent l'effet de chaque inclusion sur elle même : il s'agit des mêmes grandeurs qu'on retrouve dans un schéma dilué,
- d'autres termes qui traduisent l'effet sur une inclusion produit par toutes les autres inclusions en présence : il s'agit des tenseurs d'influence. C'est la prise en compte explicite de ces grandeurs pour toutes les paires d'inclusions qui donne la spécificité de cette méthode par rapport aux schémas classiques qui ne prennent en compte ces termes que de façon approchée,
- des termes de correction lorsque le domaine de calcul est borné.

Les hypothèses considérées pour un usage pratique de cette méthode d'homogénéisation imposent le choix d'un milieu de référence du même matériau que la matrice et la génération de volumes élémentaires statistiques de forme ellipsoïdale. Cette dernière hypothèse sur la géométrie des microstructures constitue des limitations de la méthode. Néanmoins, il n'y a aucune discrétisation ou maillage à faire, l'élément de base étant l'inclusion elle-même. L'ensemble des données définissant une inclusion (position, orientation, forme) constitue la seule information géométrique à fournir. Par ailleurs, le nombre de degrés de liberté de cette méthode est nettement inférieur à celui des méthodes des éléments finis ou de la transformée de Fourier rapide.

Le fait de considérer que chaque inclusion est sous l'influence de toutes les autres fait que la matrice du système assemblée est pleine, contrairement aux matrices relatives à des méthodes numériques telles que les éléments finis ou les éléments discrets. On observe ce genre de difficultés pour la méthode des éléments de frontière par exemple. Comme le nombre de degrés de liberté reste tout de même relativement bas, la complexité du calcul demeure réduite, à moins que le degré polynomial des champs soit élevé, notamment en 3D.

L'extension de la méthode de l'inclusion équivalente à d'autres formes d'inclusions a pour vocation de mieux représenter la microstructure (granulats de forme asphérique, béton fissuré ou fibré, certains hydrates dans la pâte du ciment, ...). Le calcul des tenseurs d'influence constitue la difficulté principale lorsqu'on prend en compte des inclusions ellipsoïdales. Contrairement au cas des sphères, ces tenseurs n'ont pas d'expression analytique pratique. Deux méthodes complémentaires ont été proposées pour le calcul de ces tenseurs :

- méthode de Berveiller, consistant à calculer numériquement une intégrale double dans le domaine de Fourier. Cette méthode est nécessaire quand les inclusions sont rapprochées, auquel cas la forme des inclusions joue un rôle important,
- approximation par le développement limité d'ordre 2. Cette approximation est d'autant plus précise que les inclusions sont éloignées. Dans cette approximation, seuls interviennent d'une manière découplée les volumes des inclusions et leurs tenseurs d'inertie.

Pour un calcul complet sur une microstructure de taille réelle, les deux méthodes sont utilisées conjointement. Le choix de l'une ou l'autre méthode est basé sur la distance entre les inclusions. Pour des distances supérieures à une distance dite de transition, c'est le développement limité qui est choisi. Un calcul complet par intégration numérique est effectué dans le cas contraire. La définition de cette distance de transition reste néanmoins difficile. Nos calculs montrent tout de même que l'erreur relative reste inférieure à 1% en moyenne pour des inclusions élançées et s'avère meilleure pour la plupart des paires d'inclusions. Le manque de précision sur quelques tenseurs d'influence n'affecte pas pour autant le calcul global sur l'ensemble de la microstructure.

Pour les microstructures à inclusions ellipsoïdales, la majeure partie du temps de calcul est consommée par l'assemblage de la matrice du système. Il y a intérêt à réduire au mieux le nombre de tenseurs calculés par intégration numérique. L'application présentée nous a permis de constater que le fait de réduire la distance de transition en faveur de l'approximation par développement limité ne dégrade pas significativement le résultat.

L'algorithme implémenté pour cette méthode tient compte de l'indépendance des blocs de la matrice, ce qui permet de faire des calculs parallèles. Le recours à la parallélisation s'avère crucial pour ces calculs.

Le fluage du béton est modélisé par la viscoélasticité linéaire sans vieillissement. L'extension des méthodes d'homogénéisation de l'élasticité linéaire à ce genre de comportements se fait par le biais de la transformation de Laplace–Carson. Le calcul dans l'espace de la transformée conduit à des résultats indexés par la variable de Laplace. Le retour aux originales, dans l'espace temporel, nécessite l'inversion de cette transformation. En pratique, cette inversion nécessite l'utilisation de méthodes numériques.

La précaution à prendre pour un calcul pratique avec la méthode de l'inclusion équivalente, comme elle est relativement lourde, est d'utiliser des méthodes d'inversion numérique qui nécessitent un minimum de calculs dans l'espace de Laplace–Carson. La méthode de collocation, permettant d'approcher un comportement viscoélastique linéaire non vieillissant complexe par un modèle de Maxwell généralisé, s'avère utile dans notre cas. Cette méthode est présentée sous plusieurs formes ; l'approche de Lévesque est adoptée dans le présent travail. Cette dernière, contrairement à la définition classique de la méthode de collocation, considère les temps caractéristiques du modèle de Maxwell généralisé indépendants des points de collocation (où la transformée est évaluée). La difficulté de cette approche est qu'elle présente un nombre important de paramètres, qui rendent délicate son application objective et automatisée. Le présent travail présente une méthodologie de choix des points de collocation et propose d'améliorer la qualité de l'inversion par optimisation des temps caractéristiques du modèle de Maxwell généralisé. L'indépendance entre les temps caractéristiques et les points d'évaluation présente un avantage considérable pour le calcul avec la méthode de l'inclusion équivalente : l'optimisation des temps caractéristiques ne nécessite aucune évaluation supplémentaire dans l'espace de Laplace–Carson.

Pour autant, l'optimisation des temps caractéristiques n'est pas sans difficultés. Les algorithmes utilisés dépendent le plus souvent du point de départ et l'erreur quadratique optimisée devient rapidement très faible et très sensible aux erreurs de virgule flottante, ce qui limite la qualité de l'optimisation. À défaut d'atteindre l'optimum, l'optimisation des temps caractéristiques permet dans tous les cas d'améliorer la qualité de l'inversion moyennant un calcul à faible coût relativement au coût de l'application de la méthode d'homogénéisation utilisée.

Finalement, on a présenté le principe d'utilisation de la méthode de l'inclusion équivalente dans le cadre de la viscoélasticité linéaire sans vieillissement. En parallèle avec l'amélioration de la précision de la méthode d'inversion de la transformée de Laplace–Carson, les tenseurs d'influence ont le grand avantage de s'écrire de manière à découpler les termes relatifs aux matériaux et ceux relatifs à la géométrie. Cela signifie que les calculs coûteux peuvent être faits une seule fois pour une géométrie donnée (et les résultats éventuellement stockés) et la matrice du système est obtenue par combinaison linéaire de ces grandeurs purement géométriques. L'assemblage dans le cadre de la viscoélasticité linéaire non vieillissante devient à cet effet comparable à l'assemblage en élasticité linéaire.

Perspectives

La méthode de l'inclusion équivalente trouve son intérêt pour un grand nombre d'applications. Elle permet d'étudier des microstructures d'une manière relativement détaillée sans que

l'utilisateur ait à générer ou discrétiser une géométrie complexe. Le temps de calcul est également un atout pour cette méthode lorsqu'il s'agit d'inclusions sphériques. Pour des inclusions ellipsoïdales, l'assemblage de la matrice du système linéaire issu de cette méthode demande plus de temps et la précision du calcul numérique des tenseurs d'influence reste limitée. Pour une utilisation pratique quelle que soit la géométrie, il serait intéressant de réduire le temps d'assemblage et de calculer les tenseurs d'influence avec une meilleure précision.

En ce qui concerne le calcul du fluage, il serait judicieux de réaliser un certain nombre d'applications en utilisant des données de matériaux réels pour valider la robustesse de la méthode de l'inclusion équivalente et des méthodes utilisées pour l'inversion de la transformée de Laplace–Carson.

Nous présentons dans ce qui suit des idées d'amélioration, au niveau de l'approche multiéchelle en élasticité linéaire et en viscoélasticité linéaire sans vieillissement, qui peuvent être bénéfiques pour une utilisation plus pratique de la méthode de l'inclusion équivalente.

À propos de l'approche multiéchelles

Amélioration du schéma d'intégration

Avant de parler de l'enrichissement de la forme des champs pour des inclusions ellipsoïdales, il serait utile de se pencher sur l'amélioration de la précision du calcul des tenseurs d'influence par intégration numérique. Le support de l'intégrande devient de plus en plus étroit au fur et à mesure que les inclusions s'éloignent. Le schéma d'intégration par icosaèdre raffiné proposé dans ce travail ne tient pas compte de la taille du support de l'intégrande et devient ainsi très vite inadapté au calcul des tenseurs d'influence. On a essayé lors de ce travail des techniques de détection numérique du bord du support, mais le calcul devient encore plus lourd si on procède de la sorte. L'amélioration de la précision du calcul numérique serait un grand atout, mais le temps de calcul ne doit pas être négligé.

Élancements importants

Dans les exemples présentés dans ce travail, on arrive à des précisions acceptables pour des rapports d'aspect de $1/8$, mais il existe des éléments microstructuraux qui nécessitent des élancements plus importants (fissures et fibres). L'amélioration de la précision du calcul par intégration numérique des tenseurs d'influence permettrait également de prendre en compte ces niveaux d'élancement. Il y eu des tentatives dans ce travail pour calculer analytiquement les tenseurs d'influence pour les rapports d'aspect limites, mais les expressions obtenues ne sont pas exploitables.

Distance de transition

On utilise simultanément deux méthodes pour le calcul des tenseurs d'influence des ellipsoïdes selon la distance entre les inclusions. Jusqu'à présent, on s'est appuyé sur des études exhaustives

pour déterminer la distance de transition. Il serait plus pratique de déterminer un critère permettant de situer cette frontière d'une manière plus systématique. Ce critère est géométrique et peut dépendre éventuellement du contraste de rigidité entre les matériaux.

Calcul des matrices pleines et résolution du système linéaire

La matrice du système de la méthode de l'inclusion équivalente est définie positive ou négative dense. Le système de cette méthode est formulé dans le présent manuscrit de manière à ce qu'on ait la symétrie. Sans arriver à la simplicité des méthodes utilisées pour l'inversion des matrices creuses, il y a des techniques qui peuvent être utilisées pour optimiser la résolution du système linéaire issu de l'application cette méthode. On a participé au cours de ce travail à un projet¹¹ qui a visé à appliquer les techniques de matrices hiérarchiques pour la résolution de systèmes de la méthode de l'inclusion équivalente dans le cadre du transport. Ces méthodes ont montré un gain considérable sur le temps de résolution. L'assemblage de la matrice coûte en général plus de temps, mais, pour la viscoélasticité par exemple où en pratique la combinaison linéaire de deux matrices suffit à effectuer plusieurs calculs dans l'espace de Laplace–Carson, l'optimisation du temps de résolution peut s'avérer bénéfique.

Comparaison à un calcul de référence avec ellipsoïdes

Enfin, pour étudier la représentativité des calculs effectués sur des microstructures à inclusions ellipsoïdales, il serait nécessaire de se donner des références par d'autres méthodes sur des microstructures de grande taille. Cela permettra également de comparer la complexité et la précision.

Champs dans la matrice

Au cours de ce travail, on s'est intéressé uniquement aux champs dans les inclusions. Il est également important d'estimer les fluctuations des champs dans la matrice à partir des résultats obtenus par la méthode de l'inclusion équivalente.

Champs polynômiaux pour des inclusions ellipsoïdales

L'enrichissement de la méthode de l'inclusion équivalente est réalisé à deux niveaux :

- forme du champ de polarisation dans les inclusions : polarisation de forme polynômiale (Brisard *et al.*, 2014) dans des inclusions sphériques uniquement,
- forme géométrique ellipsoïdale des inclusions : traitée dans le présent travail.

L'extension à une forme géométrique ellipsoïdale n'est effectuée que pour des polarisations uniformes par inclusion (polynômiales de degré 0). La généralisation de cette géométrie à d'autres ordres polynômiaux permettrait d'améliorer l'estimation des propriétés macroscopiques d'une microstructure.

11. CEMRACS 2013 : projet COMPRESS : "Homogénéisation de microstructures complexes type béton : optimisation de la résolution par « compression » de matrice" (Cazeaux et Zahm, 2013)

À propos des calculs de viscoélasticité

Statut de borne

Le statut de borne que confère aux estimations le principe de Hashin et Shtrikman pour l'élasticité linéaire n'est pas directement transmissible à la viscoélasticité linéaire non vieillissante¹². Cela constitue le premier point qui peut être développé. Néanmoins, il serait intéressant de dénombrer les cas où l'estimation de la méthode de l'inclusion équivalente a un statut de borne en viscoélasticité linéaire sans vieillissement.

Calcul pour des matériaux composites à fort contraste

On a noté que les contrastes dans le domaine de Laplace–Carson par rapport à la transformée du comportement du milieu de référence peuvent être très élevés pour certaines valeurs de la variable de Laplace. Il est connu également que le fort contraste a une influence négative sur la précision des résultats de l'homogénéisation. Une étude approfondie de la précision des résultats de la méthode de l'inclusion équivalente permettrait de confirmer le domaine d'application de cette méthode. (Cela permettra également d'envisager son application à des matériaux élastiques à fort contraste tels que les enrobés bitumineux)

Optimisation des temps caractéristiques

On a proposé une méthodologie d'optimisation des temps caractéristiques de la méthode de collocation, adaptée à l'usage de la méthode de l'inclusion équivalente. On constate néanmoins que la fonction coût choisie dans ce travail devient rapidement très faible lorsque le nombre de termes de la somme de Prony augmente. L'évaluation de la fonction coût est alors affectée par des erreurs de virgule flottante, ce qui nuit à la qualité de l'optimisation. Il serait intéressant de définir une autre fonction coût moins problématique en vue de l'optimisation.

Établir une méthodologie de choix des points de collocation pour la méthode de l'inclusion équivalente

On a proposé une méthodologie de choix des points de collocation. Il serait important de mettre au point des méthodes qui rendent ce choix systématique. Cependant, il est difficile de prédire un bon choix lorsqu'on ne connaît pas la forme de la transformée de Laplace–Carson de la fonction viscoélastique étudiée, ce qui est le cas en général quand on applique la méthode de l'inclusion équivalente. On a proposé de se référer dans ce cas à des modèles simplifiés proches de cette méthode pour avoir un ordre de grandeur des temps caractéristiques et une estimation de la forme de la transformée. A priori, le schéma de Mori–Tanaka semble être une bonne référence pour les évaluer de façon approchée.

12. Il y a des techniques qui permettent de conserver un statut de borne de type Hashin et Shtrikman (Gibiansky et Milton, 1993; Milton et Berryman, 1997) en viscoélasticité pour un certain nombre de problèmes. Mais elles utilisent les définitions complexes des modules et la transformée de Fourier.

Modélisation plus réaliste du comportement du béton

Enfin, il est important de mieux comprendre les modèles de fluage utilisés de point de vue physique et de faire le rapprochement entre les modèles rhéologiques et le comportement réel. On dispose de bases de données expérimentales très fournies pour le fluage de plusieurs matériaux cimentaires à plusieurs échelles. Une confrontation du comportement observé expérimentalement au comportement idéalisé peut aider à mesurer les conséquences des hypothèses de calcul et à mieux choisir et paramétrer les modèles de comportement.

Bibliographie

- J. ABATE : A unified framework for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 18(4):408–421, 2006.
- J. ABATE, G. L. CHOUDHURY et W. WHITT : Numerical inversion of multidimensional laplace transforms by the laguerre method. *Performance Evaluation*, 31(3–4):229 – 243, 1998. ISSN 0166-5316. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166531697000023>.
- K. ATKINSON : Numerical integration on the sphere. *The ANZIAM Journal*, 23 (03):332–347, 1982. ISSN 1446-8735. URL http://journals.cambridge.org/article_S0334270000000278.
- M. BERVEILLER, O. FASSIFEHRI et A. HIHI : The problem of two plastic and heterogeneous inclusions in an anisotropic medium. *International Journal of Engineering Science*, 25(6): 691–709, 1987.
- S. BEURTHEY et A. ZAOUI : Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(1):1 – 16, 2000. ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753800001571>.
- M. A. BIOT : Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena. *Journal of Applied Physics*, 25(11):1385–1391, nov. 1954. ISSN 0021-8979, 1089-7550. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/25/11/10.1063/1.1721573>.
- N. BOULEAU : Interprétation probabiliste de la viscoélasticité linéaire. *Mechanics Research Communications*, 19:16–20, 1991. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00018184>.
- R. BRENNER, R. MASSON, O. CASTELNAU et A. ZAOUI : A “quasi-elastic” affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(6):943 – 960, 2002. ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753802012470>.
- S. BRISARD, L. DORMIEUX et K. SAB : A variational form of the equivalent inclusion method for numerical homogenization. *International Journal of Solids and Structures*, 51(3–4):716–728, fév. 2014. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768313004320>.

- S. BRISARD, K. SAB et L. DORMIEUX : New boundary conditions for the computation of the apparent stiffness of statistical volume elements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(12):2638–2658, déc. 2013a. ISSN 00225096. URL <https://hal-enpc.archives-ouvertes.fr/hal-00871767>.
- S. BRISARD : *Analyse morphologique et homogénéisation numérique : application à la pâte de ciment*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech – CNRS : UMR8205 – IFSTTAR 6-8, avenue Blaise Pascal Cité Descartes Champs-sur-Marne 77455 Marne-la-Vallée France, 2011. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00617356>.
- S. BRISARD, L. DORMIEUX et K. SAB : Improved bounds on the elastic properties of porous media with the variational equivalent inclusion method (VEIM). p. 10, fév. 2013b. This article is in process The final version will be delivered soon.
- P. CAZEAUX et O. ZAHM : Application of Hierarchical Matrix Techniques To The Homogenization of Composite Materials. *arXiv :1401.0185 [math]*, déc. 2013. URL <http://arxiv.org/abs/1401.0185>. arXiv : 1401.0185.
- T. L. COST et E. B. BECKER : A multidata method of approximate laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(2):207–219, 1970. ISSN 1097-0207. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620020206>.
- C. DONOLATO : Analytical and numerical inversion of the Laplace–Carson transform by a differential method. *Computer Physics Communications*, 145(2):298 – 309, 2002. ISSN 0010-4655. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465502002813>.
- C. F. DUNANT, B. BARY, A. B. GIORLA, C. PÉNIGUEL, J. SANAHUJA, C. TOULEMONDE, A.-B. TRAN, F. WILLOT et J. YVONNET : A critical comparison of several numerical methods for computing effective properties of highly heterogeneous materials. *Advances in Engineering Software*, 58:1–12, avr. 2013. ISSN 0965-9978. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997812001846>.
- M. EL MOUDEN et A. MOLINARI : Interaction of elastic inclusions. *Computational Materials Science*, 5(1-3):82 – 86, 1996. ISSN 0927-0256. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0927025695000607>. <ce :title>Computational Modelling of the Mechanical Behaviour of Materials</ce :title>.
- M. EL MOUDEN et A. MOLINARI : Thermoelastic properties of composites containing ellipsoidal inhomogeneities. *Journal of Thermal Stresses*, 23:233–255, 2000.
- J. ESCODA : *Modélisation morphologique et micromécanique 3D de matériaux cimentaires*. Mathématiques/Mathématiques générales, Mines ParisTech, École Nationale Supérieure des Mines - Paris (ParisTech) 35 Rue Saint-Honoré - 77305 Fontainebleau cedex France, avr. 2012. URL <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00741312>.
- J. D. ESHELBY : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of The Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241(1226):376–396, 1957.

- M. FERRARI : Asymmetry and the high concentration limit of the mori-tanaka effective medium theory. *Mechanics of Materials*, 11(3):251–256, mai 1991. ISSN 0167-6636. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016766369190006L>.
- J. D. FERRY : *Viscoelastic properties of polymer solutions*. National Bureau of Standards, 1948. URL <http://archive.org/details/jresv41n1p53>.
- L. V. GIBIANSKY et G. W. MILTON : On the Effective Viscoelastic Moduli of Two-Phase Media. I. Rigorous Bounds on the Complex Bulk Modulus. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 440(1908):163–188, jan. 1993. ISSN 0962-8444. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/440/1908/163>.
- L. GRANGER : *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires : analyse et modélisation*. Sciences de l'ingénieur/Mécanique, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, LCPC - Laboratoire Central des Ponts et Chaussées <http://www.lcpc.fr/> LCPC 58 boulevard Lefebvre 75732 PARIS Cedex 15 France, fév. 1995. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00520675>.
- Z. HASHIN et S. SHTRIKMAN : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10(4):335–342, 1962.
- R. HILL : A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4):213–222, août 1965. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509665900104>.
- H. HOANG-DUC et G. BONNET : Effective properties of viscoelastic heterogeneous periodic media : An approximate solution accounting for the distribution of heterogeneities. *Mechanics of Materials*, 56(0):71 – 83, 2012. ISSN 0167-6636. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663612001640>.
- H. HOANG-DUC, G. BONNET et F. MEFTAH : Generalized self-consistent scheme for the effective behavior of viscoelastic heterogeneous media : A simple approximate solution. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 39(0):35 – 49, 2013. ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753812001362>.
- W. KAHAN : Pracniques : further remarks on reducing truncation errors. *Commun. ACM*, 8 (1):40–, jan. 1965. ISSN 0001-0782. URL <http://doi.acm.org/10.1145/363707.363723>.
- T. KANIT, S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY et D. JEULIN : Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13–14):3647 – 3679, 2003. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303001434>.
- Q. V. LE : *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, jan. 2008. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00468616>.

- Y. LE PAPE, C. TOULEMONDE, Q. V. LE, Q. HE et F. MEFTAH : Modeling concrete creep as an heterogeneous material combining analytical and numerical approaches. In *Creep, Shrinkage and Durability Mechanics of Concrete and Concrete Structures, Two Volume Set*, p. 223–227. Taylor & Francis, déc. 2008. ISBN 978-0-415-48508-1. URL <http://www.crcnetbase.com/doi/abs/10.1201/9780203882955.ch26>.
- R. LE ROY : *Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, LCPC 58 boulevard Lefebvre 75732 PARIS Cedex 15 France, sept. 1995. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00529739>.
- M. LÉVESQUE : *Modélisation du comportement mécanique de matériaux composites viscolélastiques non linéaires par une approche d'homogénéisation*. Science des matériaux, mécanique, génie mécanique, Arts et Métiers ParisTech, Arts et Métiers ParisTech, déc. 2004. URL <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001237>.
- M. LÉVESQUE, M. GILCHRIST, N. BOULEAU, K. DERRIEN et D. BAPTISTE : Numerical inversion of the Laplace–Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. *Computational Mechanics*, 40(4):771–789, 2007. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-006-0138-6>.
- J. MANDEL : *Cours de mécanique des milieux continus*, vol. II. Gauthier-Villars, Paris, 1966. URL <http://catalog.hathitrust.org/Record/000426385>. 2 v.
- D. W. MARQUARDT : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- R. MASSON, R. BRENNER et O. CASTELNAU : Incremental homogenization approach for ageing viscoelastic polycrystals. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(4–5):378 – 386, 2012. ISSN 1631-0721. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072112000587>.
<ce :title>Recent Advances in Micromechanics of Materials</ce :title>.
- G. W. MILTON et J. G. BERRYMAN : On the effective viscoelastic moduli of two-phase media. II. Rigorous bounds on the complex shear modulus in three dimensions. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1964):1849–1880, sept. 1997. ISSN 1364-5021, 1471-2946. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/453/1964/1849>.
- T. MORI et K. TANAKA : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571 – 574, 1973. ISSN 0001-6160. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616073900643>.
- Z. MOSCHOVIDIS et T. MURA : Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 42 Ser E(4):847–852, 1975. ISSN 00218936. URL <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-0016599962&partnerID=40&md5=3ad7869f589e439c81d6c716f1ea5812>. cited By (since 1996) 130.

- J. A. NELDER et R. MEAD : A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, jan. 1965. ISSN 0010-4620, 1460-2067. URL <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/7/4/308>.
- S. T. NGUYEN : *Propagation de fissures et endommagement par microfissures des matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech – CNRS : UMR8205 – IFSTTAR 6-8, avenue Blaise Pascal Cité Descartes Champs-sur-Marne 77455 Marne-la-Vallée France, déc. 2010. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00598511>.
- P. PONTE CASTAÑEDA : The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1):45 – 71, 1991. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002250969190030R>.
- P. PONTE CASTAÑEDA et J. R. WILLIS : The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919–1951, déc. 1995. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002250969500058Q>.
- A. REKIK et R. BRENNER : Optimization of the collocation inversion method for the linear viscoelastic homogenization. *Mechanics Research Communications*, 38(4):305 – 308, 2011. ISSN 0093-6413. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641311000693>.
- J.-M. RICAUD et R. MASSON : Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *International Journal of Solids and Structures*, 46(7–8):1599 – 1606, 2009. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768308005027>.
- Y. ROUGIER et A. ZAOUI : *Etude du comportement sous irradiation : modélisation micromécanique de l'élastoviscoplasticité*. Thèse de doctorat, Palaiseau, Essonne, France, 1994.
- K. SAB : On the homogenization and the simulation of random materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(5):585–607, 1992. ISSN 0997-7538. URL <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=5545667>.
- J. SALENÇON : *Viscoélasticité pour le Calcul des structures*. Viscoélasticité pour le calcul des structures. Éd. de l'École polytechnique, 2009. ISBN 9782730215572. URL <http://books.google.fr/books?id=PAoS2FIKxXEC>.
- J. SANAHUJA : Effective behaviour of ageing linear viscoelastic composites : Homogenization approach. *International Journal of Solids and Structures*, 50(19):2846–2856, sept. 2013. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768313001807>.
- J. SANAHUJA et L. DORMIEUX : Résistance d'un milieu poreux à phase solide hétérogène. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(11):818 – 823, 2005. ISSN 1631-0721. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072105001671>.

- J. SANAHUJA, L. DORMIEUX et G. CHANVILLARD : Modelling elasticity of a hydrating cement paste. *Cement and Concrete Research*, 37(10):1427–1439, oct. 2007. ISSN 0008-8846. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884607001548>.
- R. A. SCHAPERY : Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. 1962.
- A. SELLIER et L. BUFFO-LACARRIÈRE : Vers une modélisation simple et unifiée du fluage propre, du retrait et du fluage en dessiccation du béton. *Revue européenne de génie civil*, 13(10):1161–1182, déc. 2009. ISSN 17747120. URL <http://ejece.revuesonline.com/article.jsp?articleId=13988>.
- H. STEHFEST : Algorithm 368 : Numerical inversion of laplace transforms [d5]. *Communications of the ACM*, 13(1):47–49, 1970a. URL <http://doi.acm.org/10.1145/361953.361969>.
- H. STEHFEST : Remark on algorithm 368 : Numerical inversion of laplace transforms. *Communications of the ACM*, 13(10):624, 1970b. URL <http://doi.acm.org/10.1145/355598.362787>.
- S. TORQUATO : Effective stiffness tensor of composite media–I. Exact series expansions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9):1421–1448, sept. 1997. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509697000197>.
- N.-C. TRAN : Vi(CA)2t - virtual cement & concrete aging analysis toolbox, oct. 2014.
- M. K. TRANSTRUM et J. P. SETHNA : Improvements to the Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization. *arXiv :1201.5885 [physics]*, jan. 2012. URL <http://arxiv.org/abs/1201.5885>. arXiv : 1201.5885.
- P. P. VALKÓ et J. ABATE : Comparison of sequence accelerators for the gaver method of numerical laplace transform inversion. *Computers & Mathematics with Applications*, 48(3-4):629–636, 2004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122104840823>.
- L. J. WALPOLE : Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes : multiplication tables. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 391(1800):149–179, 1984.
- J. R. WILLIS : Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(3):185–202, 1977.
- R. ZELLER et P. H. DEDERICHS : Elastic constants of polycrystals. *Physica Status Solidi (B)*, 55(2):831–842, 1973.
- Q. ZHANG, R. LE ROY, M. VANDAMME et B. ZUBER : Long-term creep properties of cementitious materials : Comparing microindentation testing with macroscopic uniaxial compressive testing. *Cement and Concrete Research*, 58:89–98, avr. 2014. ISSN 0008-8846. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884614000052>.

Annexes

Annexe A

Calcul numérique du tenseur d'influence

Nous présentons dans cette section un calcul intrinsèque (Brisard) du tenseur d'influence effectué dans l'espace de Fourier. Ce calcul est basé sur le travail de Berveiller *et al.* (1987, annexe).

Nous cherchons à calculer le tenseur d'influence $\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{r})$ relatif à deux inclusions α et β de centres \underline{x}_α et \underline{x}_β et de volumes V_α et V_β .

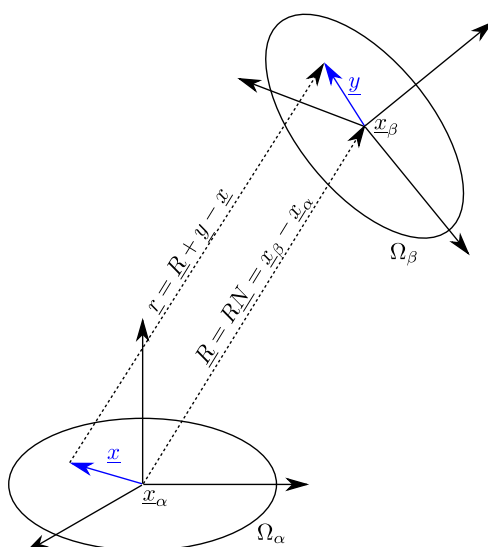


FIGURE A.1 – Schéma de deux inclusions ellipsoïdales

Le tenseur d'influence est défini comme suit :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \mathbb{T}_0^\infty(\underline{R} + \underline{y} - \underline{x}) dV_x dV_y \quad (\text{A.1})$$

$$= \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\beta(\underline{y}) (\mathbb{T}_0^\infty \circledast \chi_\alpha)(\underline{R} + \underline{y}) dV_y \quad (\text{A.2})$$

Or, en écrivant le produit de convolution en fonction de sa transformée de Fourier, on a :

$$\mathbb{T}_0^\infty \circledast \chi_\alpha(\underline{z}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\underline{k} \in \mathbb{R}^d} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) \hat{\chi}_\alpha(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{z}} dV_k \quad (\text{A.3})$$

Donc

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\beta(\underline{y}) \int_{\underline{k} \in \mathbb{R}^d} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) \hat{\chi}_\alpha(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} dV_k dV_y \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\underline{k} \in \mathbb{R}^d} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) \hat{\chi}_\alpha(\underline{k}) \left(\int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\beta(\underline{y}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{y}} dV_y \right) e^{i\underline{k} \cdot \underline{R}} dV_k \quad (\text{A.5})$$

Il en résulte :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\underline{k} \in \mathbb{R}^d} \hat{\chi}_\alpha(\underline{k}) \hat{\chi}_\beta(-\underline{k}) \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{R}} dV_k} \quad (\text{A.6})$$

Facteur de forme d'ellipsoïde Soient \underline{e}_a , \underline{e}_b et \underline{e}_c les axes propres d'inertie de l'ellipsoïde, et a , b , c les rayons correspondants. Dans le repère propre d'inertie, l'équation de l'ellipsoïde est :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{A.7})$$

Donc

$$\hat{\chi}(\underline{k}) = \int_{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} dV_x \quad (\text{A.8})$$

On pose $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$, $Z = \frac{z}{c}$ et $\underline{X} = X\underline{e}_x + Y\underline{e}_y + Z\underline{e}_z$. De même, on pose $K_x = ak_x$, $K_y = ak_y$, $K_z = ak_z$ et $\underline{K} = K_x\underline{e}_x + K_y\underline{e}_y + K_z\underline{e}_z$.

$$\hat{\chi}(\underline{k}) = abc \int_{X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1} e^{-i\underline{K} \cdot \underline{X}} dV_X \quad (\text{A.9})$$

Or

$$\int_{\|\underline{X}\| \leq 1} e^{-i\underline{K} \cdot \underline{X}} dV_X = 3 \frac{4\pi \sin K - K \cos K}{K^3} \quad (\text{A.10})$$

Finalement ¹ :

$$\boxed{\hat{\chi}(\underline{k}) = 3V \frac{\sin K - K \cos K}{K^3}} \quad (\text{A.11})$$

1. De même, on a $\hat{\chi}(-\underline{k}) = \hat{\chi}(\underline{k}) = 3V \frac{\sin K - K \cos K}{K^3}$

avec $K = ||\underline{K}|| = \sqrt{(ak_x)^2 + (bk_y)^2 + (ck_z)^2}$.

Le tenseur d'influence s'écrit donc :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9V_\alpha V_\beta}{(2\pi)^3} \int_{\underline{k} \in \mathbb{R}^d} \frac{\sin K_\alpha - K_\alpha \cos K_\alpha}{K_\alpha^3} \frac{\sin K_\beta - K_\beta \cos K_\beta}{K_\beta^3} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{R}} dV_k \quad (\text{A.12})$$

où $K_\alpha = \sqrt{(\underline{k} \cdot \underline{a}_\alpha)^2 + (\underline{k} \cdot \underline{b}_\alpha)^2 + (\underline{k} \cdot \underline{c}_\alpha)^2}$

Cette intégrale est calculée en coordonnées sphériques $\underline{k} = k\underline{n}$ en remarquant que :

$$\hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{k}) = \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{n}) \quad (\text{A.13})$$

On introduit $r_\alpha = \sqrt{(\underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha)^2 + (\underline{n} \cdot \underline{b}_\alpha)^2 + (\underline{n} \cdot \underline{c}_\alpha)^2}$ qui est indépendant de k .

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9V_\alpha V_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{n}) \int_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin kr_\alpha - kr_\alpha \cos kr_\alpha}{(kr_\alpha)^3} \frac{\sin kr_\beta - kr_\beta \cos kr_\beta}{(kr_\beta)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{R}} k^2 dk dS_n \quad (\text{A.14})$$

On introduit la fonction

$$F(a, b, c) = \int_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sin kr_\alpha - kr_\alpha \cos kr_\alpha)(\sin kr_\beta - kr_\beta \cos kr_\beta)}{k^4} e^{ikc} dk \quad (\text{A.15})$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9V_\alpha V_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \hat{\mathbb{T}}_0^\infty(\underline{n}) dS_n} \quad (\text{A.16})$$

La transformée de Fourier de l'opérateur de Green s'écrit :

$$\hat{\mathbb{T}}_0^\infty = \frac{1}{2\mu_0} (\boldsymbol{\delta} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \boldsymbol{\delta}) - \frac{1}{2\mu_0(1 - \nu_0)} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \quad (\text{A.17})$$

L'intégrale précédente est alors calculée en deux temps :

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9V_\alpha V_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \underline{n} \otimes \underline{n} dS_n \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbb{Q}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{9V_\alpha V_\beta}{(2\pi)^3} \int_{||\underline{n}||=1} \frac{F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})}{r_\alpha^3 r_\beta^3} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS_n \quad (\text{A.19})$$

Et on a :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \frac{1}{2\mu_0} (\boldsymbol{\delta} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{D} \otimes \boldsymbol{\delta}) - \frac{1}{2\mu_0(1 - \nu_0)} \mathbb{Q}} \quad (\text{A.20})$$

Calcul de la fonction F La fonction $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})$ est une fonction réelle. Le développement de son expression donne :

$$\begin{aligned}
 F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n}) = & \frac{1}{24}[-\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3a\alpha^2 - 6ab\alpha] \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha k}{k} dk \\
 & + \frac{1}{24}[\beta^3 - 3b\beta^2 + 3a\beta^2 - 6ab\beta] \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta k}{k} dk \\
 & + \frac{1}{24}[\gamma^3 + 3b\gamma^2 - 3a\gamma^2 - 6ab\gamma] \int_0^{+\infty} \frac{\sin \gamma k}{k} dk \\
 & + \frac{1}{24}[-\delta^3 + 3b\delta^2 + 3a\delta^2 - 6ab\delta] \int_0^{+\infty} \frac{\sin \delta k}{k} dk
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

telle que :

$$\begin{cases} \alpha = r_\alpha + r_\beta - c \\ \beta = -r_\alpha + r_\beta + c \\ \gamma = r_\alpha - r_\beta + c \\ \delta = r_\alpha + r_\beta + c \end{cases} \tag{A.22}$$

L'expression de $F(r_\alpha, r_\beta, \underline{R} \cdot \underline{n})$ fait apparaître des intégrales de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\alpha) \tag{A.23}$$

dont la valeur dépend du signe de α .

Dans le cas des inclusions sphériques, r_α et r_β correspondent respectivement aux rayons des inclusions α et β . Cela permet de simplifier l'expression de F et de l'intégrer analytiquement, ce qui permet de retrouver le tenseur d'influence des inclusions sphériques.

D'une manière générale, pour des inclusions ellipsoïdales, cette fonction doit être évaluée numériquement. Il y a quelques remarques qui peuvent simplifier son implémentation numérique ; par exemple, en normalisant F , r_α et r_β par $c = \underline{R} \cdot \underline{n}$:

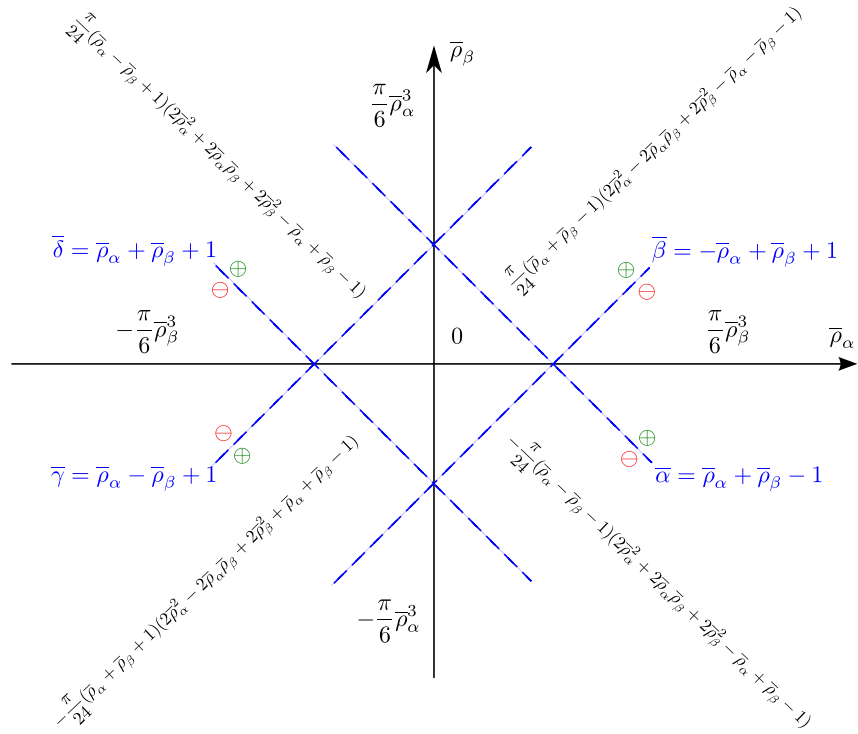
$$\bar{\rho}_\alpha = r_\alpha / c \tag{A.24a}$$

$$\bar{\rho}_\beta = r_\beta / c \tag{A.24b}$$

$$\bar{F}(\bar{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\beta) = F(r_\alpha, r_\beta, c) / |c|^3 \tag{A.24c}$$

\bar{F} peut être définie par zones en fonction de \bar{r}_α et \bar{r}_β comme le montre le schéma A.2.

Cette simplification permet de constater que la fonction F (qui est définie par morceaux) est continue, ce qui garantit la continuité de l'intégrande. En plus, dans la zone centrale du graphe, la fonction $\bar{F}(\bar{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\beta)$ (donc $F(\rho_\alpha, \rho_\beta, c)$) s'annule sur un domaine, ce qui signifie que la fonction à intégrer est nulle sur des zones.

FIGURE A.2 – Expression de \bar{F} en fonction de $\bar{\rho}_\alpha$ et $\bar{\rho}_\beta$

Annexe B

Développement limité du tenseur d'influence

B.1 Développement limité d'ordre 0

Quand deux inclusions sont éloignées, le détail de leurs formes géométriques n'est pas important. L'influence de l'une sur l'autre est motivée uniquement par le volume des inclusions. Le développement limité d'ordre 0 permet de traduire cet effet. Ce développement est égal à l'opérateur de Green multiplié par les volumes des deux inclusions.

B.2 Développement limité d'ordre 2

Le développement limité d'ordre 2 permet une convergence plus rapide que le développement de l'ordre 0. Dans le cas des inclusions sphériques, ce développement vaut exactement le tenseur d'influence.

Le calcul du développement limité dans la base des centres permet dans le cas des inclusions sphériques de trouver les tenseurs et les pseudo-tenseurs d'influence dans le cas général des polarisation polynômiales par morceaux. Le développement de ces tenseurs est fini à l'ordre 2.

Pour les inclusions ellipsoïdales, le développement limité n'est pas fini et les expressions trouvées avec des calculs dans la base des centres est lourde et peu pratique. Dans ce qui suit, nous exprimons le développement limité avec des grandeurs intrinsèques afin d'obtenir des expressions plus simples.

On rappelle la définition du tenseur d'influence :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_{\alpha}(\underline{x}) \chi_{\beta}(\underline{y}) \mathbb{T}_0^{\infty}(\underline{R} + \underline{y} - \underline{x}) dV_x dV_y \quad (\text{B.1})$$

On pose $\underline{R} = R\underline{N}$ et $\underline{\xi} = \frac{\underline{y} - \underline{x}}{R}$. D'après les propriétés de l'opérateur de Green, on a :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}(\underline{R}) = \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \mathbb{F}_0^\infty(R(\underline{N} + \underline{\xi})) dV_x dV_y \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{1}{R^d} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \mathbb{F}_0^\infty(\underline{N} + \underline{\xi}) dV_x dV_y \quad (\text{B.3})$$

On effectue un développement limité à l'ordre 2 en $\underline{\xi}$ de $\mathbb{F}_0^\infty(\underline{N} + \underline{\xi})$. Pour cela, on doit tout d'abord calculer à l'ordre 2 les grandeurs suivantes :

$$\frac{1}{\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^d} \quad \frac{(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi})}{\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{d+2}} \quad \frac{(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi})}{\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{d+4}}$$

qu'il faut ensuite intégrer sur Ω_α et Ω_β .

B.2.1 Calcul des termes élémentaires de $\underline{\xi}$

Termes constants en $\underline{\xi}$ On va voir apparaître des termes constants en $\underline{\xi}$. Leur intégration donne $V_\alpha V_\beta$ (avec $V_\alpha = |\Omega_\alpha|$ le volume de l'inclusion α).

Termes linéaires en $\underline{\xi}$ On a :

$$\begin{aligned} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \underline{\xi} dV_x dV_y &= \frac{1}{R} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) (\underline{y} - \underline{x}) dV_x dV_y \\ &= \frac{V_\alpha}{R} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\beta(\underline{y}) \underline{y} dV_y - \frac{V_\beta}{R} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \underline{x} dV_x \\ &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En effet, $\int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \underline{x} dV_x = \underline{0}$ si la fonction indicatrice χ_α est repérée par son barycentre.

Termes quadratiques en $\underline{\xi}$

$$\begin{aligned} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} dV_x dV_y \\ &= \frac{1}{R^2} \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) (\underline{y} \otimes \underline{y} - \underline{y} \otimes \underline{x} - \underline{x} \otimes \underline{y} + \underline{x} \otimes \underline{x}) dV_x dV_y \\ &= \frac{1}{R^2} \left(V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha - 2 \int_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d} \chi_\alpha(\underline{x}) \underline{x} dV_x \otimes \int_{\underline{y} \in \mathbb{R}^d} \chi_\beta(\underline{y}) \underline{y} dV_y \right) \\ &= \frac{1}{R^2} (V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où $\mathbf{I}_\alpha = \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \underline{x} \otimes \underline{x} dV_x$ est le tenseur d'inertie de l'inclusion α .

En résumé :

- Intégration des termes d'ordre 0 en $\underline{\xi}$ $\rightarrow V_\alpha V_\beta$
- Intégration des termes d'ordre 1 en $\underline{\xi}$ $\rightarrow 0$
- Intégration des termes d'ordre 2 en $\underline{\xi}$ $\rightarrow \frac{1}{R^2} (V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha)$

On aura par ailleurs besoin du développement limité d'ordre 2 en $\underline{\xi}$ de $\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-k}$. On écrit pour cela que $\|\underline{N} + \underline{\xi}\| = \sqrt{(\underline{N} + \underline{\xi})^2} = \sqrt{1 + 2\underline{N} \cdot \underline{\xi} + \xi^2}$ Donc :

$$\begin{aligned}
\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-k} &= (1 + 2\underline{N} \cdot \underline{\xi} + \xi^2)^{-\frac{k}{2}} \\
&= 1 - \frac{k}{2}(2\underline{N} \cdot \underline{\xi} + \xi^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{-k}{2} \right) \left(\frac{-k}{2} - 1 \right) (2\underline{N} \cdot \underline{\xi} + \xi^2)^2 + \mathcal{O}(\xi^2) \\
&= 1 - k\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{k}{2}\xi^2 + \frac{k(k+2)}{8}(2\underline{N} \cdot \underline{\xi})^2 + \mathcal{O}(\xi^2) \\
\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-k} &= 1 - k\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{k}{2}\xi^2 + \frac{k(k+2)}{2}(\underline{N} \cdot \underline{\xi})^2 + \mathcal{O}(\xi^2)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

B.2.2 Calcul des termes tensoriels

Calcul du terme scalaire On pose

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^0(\underline{R}) = \int_{\underline{y}} \int_{\underline{x}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-d} dV_x dV_y \tag{B.7}$$

D'après le calcul précédent, on a :

$$\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-d} = 1 - d\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d}{2}\xi^2 + \frac{d(d+2)}{2}(\underline{N} \cdot \underline{\xi})^2 + \mathcal{O}(\xi^2) \tag{B.8}$$

$$= 1 - d\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d}{2}\text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \frac{d(d+2)}{2}\underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} + \mathcal{O}(\xi^2) \tag{B.9}$$

Par intégration

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^0(\underline{R}) = V_\alpha V_\beta - \frac{d}{2}\text{tr} \frac{V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha}{R^2} + \frac{d(d+2)}{2}\underline{N} \cdot \frac{V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha}{R^2} \cdot \underline{N}$$

En posant $\mathbf{J}_{\alpha\beta} = V_\alpha \mathbf{I}_\beta + V_\beta \mathbf{I}_\alpha$, on a finalement :

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^0(\underline{R}) = V_\alpha V_\beta - \frac{d}{2}\text{tr} \frac{\mathbf{J}_{\alpha\beta}}{R^2} + \frac{d(d+2)}{2}\underline{N} \cdot \frac{\mathbf{J}_{\alpha\beta}}{R^2} \cdot \underline{N} \tag{B.10}$$

Calcul du terme tensoriel d'ordre 2 On pose

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^2(\underline{R}) = \int_{\underline{y}} \int_{\underline{x}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) \|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-(d+2)} (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) dV_x dV_y \tag{B.11}$$

On a d'une part : $\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-(d+2)} = 1 - (d+2)\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d+2}{2}\text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \frac{(d+2)(d+1)}{2}\underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} + \mathcal{O}(\xi^2)$
et de l'autre part : $(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) = \underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}$

Le développement limité du produit est donc :

$$\begin{aligned}
||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+2)}(\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) &= \underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \\
&\quad - (d+2)(\underline{N} \cdot \underline{\xi})(\underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{N}) \\
&\quad + \frac{d+2}{2} (-\text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + (d+1)\underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N}) \underline{N} \otimes \underline{N} \\
&\quad + \mathcal{O}(\xi^2)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Par intégration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{\alpha\beta}^2(\underline{R}) &= V_\alpha V_\beta \underline{N} \otimes \underline{N} + \frac{1}{R^2} \underline{J}_{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{d+2}{R^2} (\underline{N} \otimes \underline{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N} + \underline{N} \cdot \underline{J}_{\alpha\beta} \otimes \underline{N}) \\
&\quad + \frac{d+2}{2R^2} (-\text{tr} \underline{J}_{\alpha\beta} + (d+1)\underline{N} \cdot \underline{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N}) \underline{N} \otimes \underline{N} + \mathcal{O}(\xi^2)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Calcul du terme tensoriel d'ordre 4 On pose

$$\mathbb{T}_{\alpha\beta}^4(\underline{R}) = \int_{\underline{y}} \int_{\underline{x}} \chi_\alpha(\underline{x}) \chi_\beta(\underline{y}) ||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+4)} (\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} dV_x dV_y \tag{B.14}$$

On a :

$$||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+4)} = 1 - (d+4)\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d+4}{2} \text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \frac{(d+4)(d+6)}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} + \mathcal{O}(\xi^2)$$

Par ailleurs¹,

$$\begin{aligned}
(\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} &= (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} + \underline{\xi}) \\
&= (\underline{N} \otimes \underline{N} + 2\underline{N} \otimes^s \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} \otimes \underline{N} + 2\underline{N} \otimes^s \underline{\xi} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \\
&= \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} + 4(\underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \\
&\quad + 2(\underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes^s (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) + 4(\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \otimes (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) + \mathcal{O}(\xi^2) \\
&= \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} + 4(\underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \\
&\quad + 2(\underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes^s (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) + 2(\underline{N} \otimes \underline{N}) \overline{\otimes} (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) + 2(\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \overline{\otimes} (\underline{N} \otimes \underline{N}) + \mathcal{O}(\xi^2)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

En posant $\underline{P} = \underline{N} \otimes \underline{N}$

$$(\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} = \underline{P} \otimes \underline{P} + 4\underline{P}(\otimes^s \underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) + 2\underline{P} \otimes^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + 4\underline{P} \overline{\otimes}^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \mathcal{O}(\xi^2) \tag{B.16}$$

1. On rappelle que $(\underline{A} \overline{\otimes} \underline{B})_{ijkl} = \frac{1}{2}(A_{ik}B_{lj} + A_{il}B_{kj})$. Ainsi $(\underline{a} \otimes \underline{a}) \overline{\otimes} (\underline{b} \otimes \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{a} \otimes \underline{b} + \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{b} \otimes \underline{a})$

On en déduit le développement limité de $\|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-(d+4)}$:

$$\begin{aligned} & \|\underline{N} + \underline{\xi}\|^{-(d+4)} (\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} \\ &= \left(1 - (d+4) \underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d+4}{2} \text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \frac{(d+4)(d+6)}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} \right) \underline{P} \otimes \underline{P} \\ & \quad + 4 \left(1 - (d+4) \underline{N} \cdot \underline{\xi} \right) \underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \\ & \quad + 2 \underline{P} \otimes^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + 4 \underline{P} \underline{\otimes}^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + o(\xi^2) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Il faut une expression tensorielle de $(\underline{N} \cdot \underline{\xi}) \times 4 \underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi})$. On a

$$4 \underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) = \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} + \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N}$$

Donc

$$\begin{aligned} & (\underline{N} \cdot \underline{\xi}) \times 4 \underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \\ &= (\underline{N} \cdot \underline{\xi}) \times (\underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} + \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N}) \\ &= (\underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} \\ & \quad + \underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N}) \\ &= \underline{N} \otimes (\underline{N} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} \\ & \quad + \underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes \underline{N} \end{aligned}$$

On rappelle les notations suivantes (He et) :

$$\begin{aligned} (\underline{A} \underline{\otimes} \underline{B})_{ijkl} &= A_{ik} B_{jl} \quad \text{donc } (\underline{A} \underline{\otimes} \underline{B}) : \underline{X} = \underline{A} \cdot \underline{X} \cdot \underline{B} \\ (\underline{A} \underline{\overline{\otimes}} \underline{B})_{ijkl} &= A_{il} B_{jk} \quad \text{donc } (\underline{A} \underline{\overline{\otimes}} \underline{B}) : \underline{X} = \underline{A} \cdot {}^t \underline{X} \cdot \underline{B} \end{aligned}$$

Remarque. On a la relation suivante :

$$\underline{A} \underline{\overline{\otimes}} \underline{B} = \frac{1}{2} (\underline{A} \underline{\overline{\otimes}} \underline{B} + \underline{A} \underline{\otimes} \underline{B})$$

En utilisant ces notations, on trouve :

$$\underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} = (\underline{N} \otimes \underline{N}) \underline{\otimes} (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \quad (\text{B.18a})$$

$$\underline{\xi} \otimes \underline{N} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{N} = (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \underline{\otimes} (\underline{N} \otimes \underline{N}) \quad (\text{B.18b})$$

Et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & (\underline{N} \cdot \underline{\xi}) \times 4 \underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) \\ &= \underline{N} \otimes (\underline{P} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \underline{P} \underline{\otimes} (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi})) \cdot \underline{N} + \underline{N} \cdot ((\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \underline{\otimes} \underline{P} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{P}) \otimes \underline{N} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

En remplaçant dans l'équation B.17, on obtient :

$$\begin{aligned}
& ||\underline{N} + \underline{\xi}||^{-(d+4)} (\underline{N} + \underline{\xi})^{\otimes 4} \\
&= \left(1 - (d+4)\underline{N} \cdot \underline{\xi} - \frac{d+4}{2} \text{tr} \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \frac{(d+4)(d+6)}{2} \underline{N} \cdot (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \cdot \underline{N} \right) \underline{P} \otimes \underline{P} \\
&\quad + 4\underline{P} \otimes^s (\underline{N} \otimes^s \underline{\xi}) - (d+4)\underline{N} \otimes (\underline{P} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + \underline{P} \underline{\otimes} (\underline{\xi} \otimes \underline{\xi})) \cdot \underline{N} \\
&\quad - (d+4)\underline{N} \cdot ((\underline{\xi} \otimes \underline{\xi}) \underline{\otimes} \underline{P} + \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{P}) \otimes \underline{N} \\
&\quad + 2\underline{P} \otimes^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + 4\underline{P} \underline{\otimes}^s \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} + o(\xi^2)
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Par intégration, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{\alpha\beta}^4 &= \left(V_\alpha V_\beta - \frac{d+4}{2R^2} \text{tr} \underline{J}_{\alpha\beta} + \frac{(d+4)(d+6)}{2R^2} \underline{N} \cdot \underline{J}_{\alpha\beta} \cdot \underline{N} \right) \underline{P} \otimes \underline{P} \\
&\quad - \frac{d+4}{R^2} \underline{N} \otimes (\underline{P} \otimes \underline{J}_{\alpha\beta} + \underline{P} \underline{\otimes} \underline{J}_{\alpha\beta}) \cdot \underline{N} \\
&\quad - \frac{d+4}{R^2} \underline{N} \cdot (\underline{J}_{\alpha\beta} \underline{\otimes} \underline{P} + \underline{J}_{\alpha\beta} \otimes \underline{P}) \otimes \underline{N} \\
&\quad + \frac{2}{R^2} \underline{P} \otimes^s \underline{J}_{\alpha\beta} + \frac{4}{R^2} \underline{P} \underline{\otimes}^s \underline{J}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Tenseur d'inertie \underline{I}_α Comme il a été défini,

$$\underline{I}_\alpha = \int_{\underline{x} \in \Omega_\alpha} \underline{x} \otimes \underline{x} \, dV_x \tag{B.22}$$

Dans le repère propre de l'ellipsoïde,

$$\underline{x} \otimes \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ & x_2^2 & x_2 x_3 \\ \text{sym} & & x_3^2 \end{pmatrix}$$

On a par exemple (en posant $X_1 = \frac{x_1}{a}$, $X_2 = \frac{x_2}{b}$ et $X_3 = \frac{x_3}{c}$) :

$$\begin{aligned}
 \int_{(\frac{x_1}{a})^2 + (\frac{x_2}{b})^2 + (\frac{x_3}{c})^2 \leq 1} x_3^2 dV_x &= abc \int_{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 1} (cX_3)^2 dV_X \\
 &= \frac{abc^3}{3} \int_{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 1} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 dV_X \\
 &= \frac{abc^3}{3} \int_{r^2 \leq 1} r^2 dV_X \\
 &= \frac{abc^3}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^1 r^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{abc^3}{3} \times 2\pi \times [-\cos \theta]_0^{\pi} \times [\frac{r^5}{5}]_0^1 \\
 &= \frac{4\pi abc^3}{15} \\
 &= \frac{V_\alpha c^2}{5}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Par ailleurs,

$$\int_{\substack{x \in \Omega_\alpha \\ i \neq j}} x_i x_j dV_x = 0 \tag{B.24}$$

Ainsi :

$$\mathbf{I}_\alpha = \frac{V_\alpha}{5} (a^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + b^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + c^2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{B.25}$$

Remarque. Pour un ellipsoïde de révolution, on a :

$$\mathbf{I} = \frac{V}{5} [a^2(\boldsymbol{\delta} - \underline{d} \otimes \underline{d}) + c^2 \underline{d} \otimes \underline{d}]$$